Capítulo 5

Digitalização

A digitalização é o processo pelo qual se transformam os sinais analógicos, contínuos no tempo, em sequências de números, com um número limitado de dígitos, que representam a amplitude do sinal em instantes do tempo regularmente espaçados.

Assim, a digitalização de um sinal analógico pressupõe não só que se consideram apenas alguns dos valores do sinal contínuo, ignorando-se os valores intermédios (discretização no tempo), como também que a amplitude analógica original deixa de poder tomar quaisquer valores dentro do intervalo contínuo de variação da amplitude do sinal, para tomar apenas alguns (discretização na amplitude), única forma de poder ser representada por um número limitado (e normalmente pequeno) de dígitos.

No processo de digitalização para transmissão distinguem-se quatro fases:

(i) A *amostragem*, que consiste na recolha periódica de valores do sinal (*amostras*) substituindo-se o sinal completo apenas por esses valores;

(ii) A *quantização*, pela qual as amplitudes das amostras são aproximadas a um número limitado de níveis quânticos;

(iii) A *conversão analógico-a-digital*, que consiste na representação do valor das amplitudes quantizadas por números, normalmente na base dois e

(iv) A *codificação de linha*, através da qual os dígitos binários dos números que representam as amostras são transformados em formas de onda com as características mais apropriadas à sua transmissão.

Neste capítulo analizam-se as três primeiras fases deste processo bem como o processo inverso que permite recuperar o sinal analógico a partir dos valores numéricos das amostras. A codificação de linha é um processamento comum quer aos sinais analógicos que foram digitalizados, quer aos sinais de fontes originalmente digitais e que se destina prepará-los para a transmissão no canal e será abordada em capítulo próprio.

5.1 Teoria da Amostragem

Suponhamos um sinal de informação analógico qualquer $x(t)$, representado na figura 5.1 *a)*, possuindo um espectro com característica de amplitude $|X(f)|$ e largura de banda B Hz. Suponhamos ainda que o espectro do sinal é limitado à banda $[-B, +B]$, isto é, $|X(f)| = 0$ para $|f| \geq B$. A figura 5.1 *b)* ilustra esta situação.

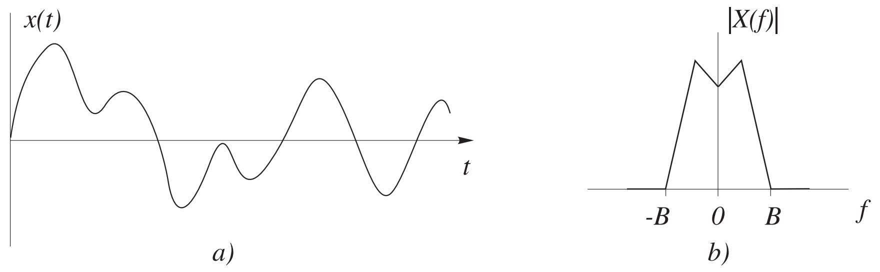

Figura 5.1: Sinal analógico de espectro limitado à banda $[-B, +B]$

5.1.1 A operação de amostragem

A operação de amostragem do sinal $x(t)$ consiste em tomar os valores do sinal em instantes regularmente espaçados no tempo e considerar que nos intervalos de tempo entre esses instantes o sinal tem amplitude nula. De uma maneira simplista, pode dizer-se que o circuito da figura 5.2 *c)* executa esta operação. À entrada do circuito introduz-se o sinal $x(t)$. Quando o comutador estiver na posição 2 a saída é zero e quando estiver na posição 1 a saída é igual à entrada. Se o comutador estiver na posição 2 e periodicamente "tocar" na posição 1 obtem-se à saída o sinal amostrado $x_a(t)$ que consiste numa sequência de amplitudes do sinal $x(t)$ tomadas a intervalos regulares de tempo. Esses intervalos de tempo constituem o *período de amostragem* que designaremos por T_a e cujo inverso é a *frequência de amostragem* em Hertz, $f_a = 1/T_a$ Hz.

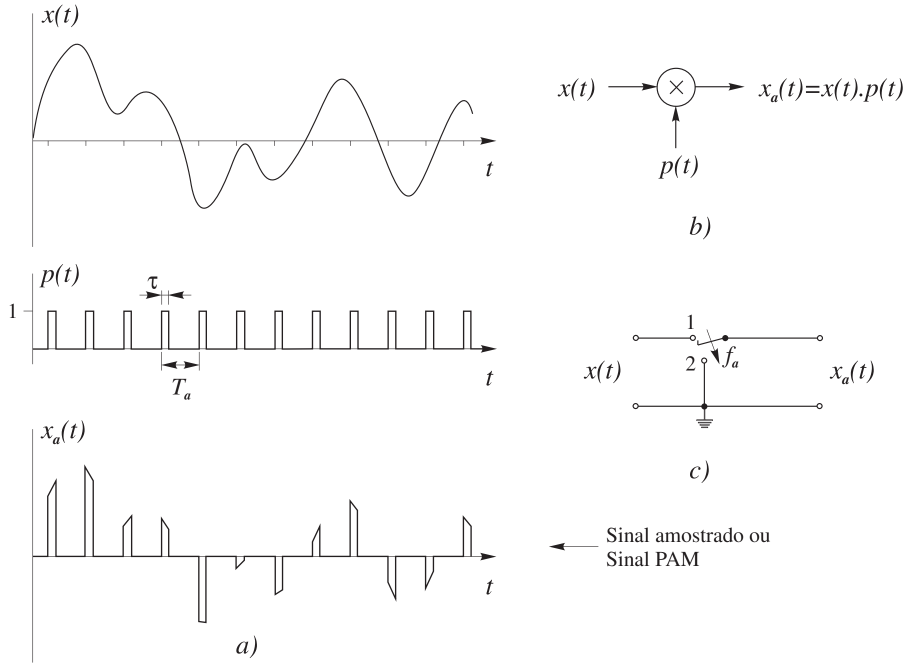

Figura 5.2: A operação de amostragem

Matematicamente, a operação de amostragem é descrita pelo produto de $x(t)$ por uma função $p(t)$ que é uma sequência de pulsos rectangulares com período de repetição igual a T_a e duração muito pequena. A figura 5.2 *b)* representa esta operação de multiplicação. Na realidade, a duração dos pulsos, τ, corresponde ao tempo em que o comutador está na posição 1 quando nela "toca". Assim, a operação de amostragem acaba por ser também uma operação de *modulação de pulso em amplitude* tendo por *portadora* a sequência de pulsos $p(t)$. Por esta razão o sinal amostrado $x_a(t)$ também se designa por sinal PAM (Pulse Amplitude Modulation).

A operação de amostragem, portanto, substitui os valores de amplitude que um sinal analógico toma ao longo de todo o tempo por apenas alguns desses valores, recolhidos em instantes determinados pela frequência de amostragem, como a figura 5.2 *a)* mostra.

Coloca-se agora a seguinte questão fundamental: Serão as *amostras* do sinal suficientes para descrever completamente o sinal original e, se assim fôr, como é que se pode recuperar o sinal original $x(t)$ a partir apenas das amostras, ou seja, do sinal amostrado, $x_a(t)$?

A resposta a esta questão é dada pelo Teorema da Amostragem que a analisa no domínio da frequência de uma forma muito simples. Basicamente o teorema determina qual o espectro do sinal depois de amostrado, $X_a(f)$ e a seguir verifica se é possivel *isolar* desse espectro o espectro do sinal original, $X(f)$. Ser-se capaz de isolar este espectro significa, na realidade, ser-se capaz de recuperar o sinal analógico original.

Este Teorema é de uma importância capital no processo de digitalização dos sinais de informação produzidos originalmente sob a forma analógica ao permitir, como se referiu no início do capítulo, lidar apenas com um conjunto de valores do sinal em número finito e, realce-se, sem qualquer perda da informação que o sinal original contenha.

5.1.2 Teorema da Amostragem

Seja $x_a(t)$ o sinal obtido por amostragem do sinal analógico $x(t)$ cujo espectro $X(f)$ é limitado à banda de frequências $[-B, +B]$. O sinal amostrado é definido pela operação

$$x_a(t) = x(t) \cdot p(t) \tag{5.1}$$

em que $p(t)$ é uma sequência de pulsos rectangulares de amplitude unitária, de período T_a e duração dos rectangulos muito pequena, $\tau \ll 1$.

Como $p(t)$ é periódica pode ser representada pela sua série de Fourier

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(nf_a)\, e^{\jmath 2\pi n f_a t} \tag{5.2}$$

onde $f_a = 1/T_a$ é a frequência de amostragem e os coeficientes da série podem ser obtidos a partir da definição dando

$$\begin{aligned} C(nf_a) &= \frac{1}{T_a} \int_{-T_a/2}^{+T_a/2} p(t)\, e^{-\jmath 2\pi n f_a t}\, dt \\ C(nf_a) &= f_a \tau \operatorname{sinc}(n f_a \tau) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Calculemos agora o espectro do sinal amostrado $X_a(f)$

$$X_a(f) = \mathcal{F}[x(t) \cdot p(t)]$$

$$
\begin{aligned}
X_a(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(nf_a)\, e^{\jmath 2\pi n f_a t} \right] e^{-\jmath 2\pi f t}\, dt \\
X_a(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(nf_a) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x(t)\, e^{\jmath 2\pi n f_a t} \right] e^{-\jmath 2\pi f t}\, dt \\
X_a(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(nf_a) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-\jmath 2\pi (f - n f_a) t}\, dt \\
X_a(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(nf_a)\, X(f - nf_a) \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

A última destas relações (5.4) diz que o espectro do sinal amostrado, $X_a(f)$ é a soma de infinitas réplicas do espectro $X(f)$ do sinal original cada uma delas deslocada na frequência de um múltiplo inteiro $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ da frequência de amostragem, incluindo $n = 0$, ou seja, o espectro do sinal original. Cada réplica vem multiplicada por um factor de escala em amplitude de valor igual a $C(nf_a)$ mas como se está a supôr que τ é muito pequeno, a equação 5.3 dá $C(nf_a)$ praticamente constante.

Se a frequência de amostragem f_a fôr igual ou superior ao dobro da largura de banda B do sinal analógico $x(t)$ então as referidas réplicas do espectro de $x(t)$ encontram-se separadas umas das outras e o espectro de amplitude do sinal amostrado definido pela equação 5.4 tem a representação gráfica que se mostra na figura 5.3 Nestas condições, o sinal original pode efecti-

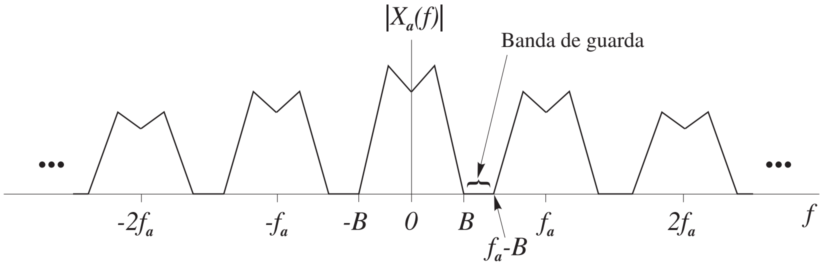

Figura 5.3: Espectro de amplitude do sinal amostrado $x_a(t)$, com $f_a > B$

vamente ser recuperado do sinal amostrado $x_a(t)$ bastando para isso que este seja filtrado por um filtro passa-baixo de largura de banda $B_T = B$. Deste modo, todas as réplicas serão eliminadas excepto a réplica central a que corresponde $n = 0$ que é exactamente o espectro do sinal analógico original $x(t)$. A figura 5.4 ilustra a operação de filtragem passa-baixo para a recuperação do sinal original. Matematicamente, esta operação de

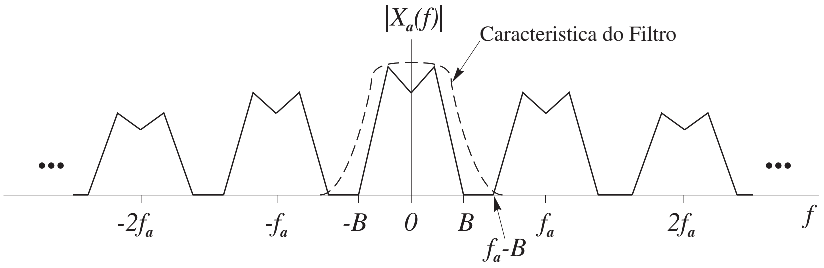

Figura 5.4: Recuperação do sinal original por filtragem do sinal amostrado

filtragem pode ser descrita pelo produto

$$X(f) = X_a(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \tag{5.5}$$

isto é, pela multiplicação do espectro $X_a(f)$ pela função de transferência $\Pi(f/2B)$ do filtro passa-baixo ideal com largura de banda $B_T = B$. Conclui-se então que

Teorema 5.1 (Teorema da Amostragem) *Um sinal de espectro limitado à banda de frequências* $[0, B]$ *fica completamente definido pelas suas amostras desde que recolhidas a uma frequência igual ou superior a* $2B$,

$$f_a \geq 2B \tag{5.6}$$

podendo o sinal ser recuperado a partir das amostras por filtragem passa-baixo com largura de banda do filtro B_T *igual a* B *Hz.*

Se a frequência de amostragem fôr inferior àquele valor (não se verificando a desigualdade (5.6)) então, regra geral, as réplicas do espectro do sinal original $x(t)$ ficarão sobrepostas não sendo possível recuperar o sinal original. Esta situação está ilustrada na figura 5.5 que representa o espectro do sinal *sub*-amostrado não havendo nenhum filtro que consiga isolar nenhuma das réplicas. Caso se tente recuperar o sinal com o filtro anterior acontece um fenómeno designado por *aliasing*[1] em que parte da banda inferior aparece duas vezes dando origem a um sinal com maiores componentes de alta frequência e portanto diferente do original.

[1]lê-se *eiliæsing* em inglês, do latim *alias*, f.p. de *alium* que significa "outra vez"

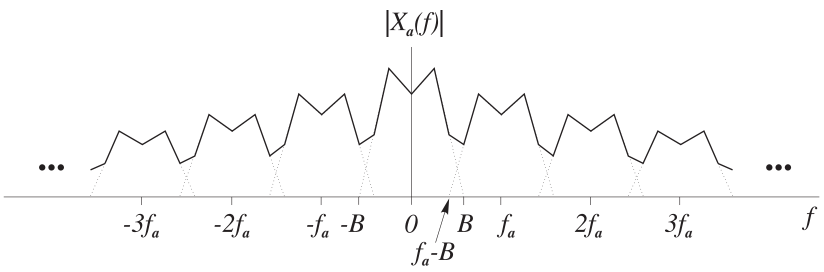

Figura 5.5: Fenómeno de *aliasing* espectral quando $f_a < 2B$

5.1.3 Amostragem na prática

Embora o Teorema da Amostragem garanta, em teoria, que um sinal analógico possa ser totalmente recuperado a partir das suas amostras se estas tiverem sido obtidas a uma frequência $f_a = 2B$, bastando para tal que o sinal possua um espectro estritamente limitado a uma banda de largura B Hz, na prática isto não se consegue por duas razões:

(i) Não se conseguem realizar filtros ideais e

(ii) Os sinais na prática não possuem espectros de banda limitada. Por serem limitados no tempo, são ilimitados na frequência.

pelo que a frequência de amostragem utilizada é normalmente

$$f_a > 2B \tag{5.7}$$

A primeira destas situações está ilustrada na figura 5.4 em que a característica do filtro é visivelmente não-ideal havendo a necessidade de deixar livre uma *banda de guarda* como se indica na figura 5.3.

A segunda mostra-se na figura 5.6 *a)* na qual, embora o sinal tenha uma largura de banda de B Hz, o seu espectro estende-se para além desta banda com componentes não nulas, isto é, $|X(f_1)| \neq 0$ para $|f_1| > B$.

Depois de amostrado mesmo a uma frequência $f_a > 2B$, ocorre o fenómeno de *aliasing* como se pode ver na figura 5.6 *b)*. Nestas condições, a única forma de evitar o *aliasing* é filtrar o sinal antes da amostragem limitando-se assim, forçadamente, a sua banda espectral ao intervalo $[-B, +B]$ como mostra a figura 5.7 *a)*. A figura 5.7 *b)* mostra o espectro do sinal amostrado após a filtragem prévia, sem *aliasing*.

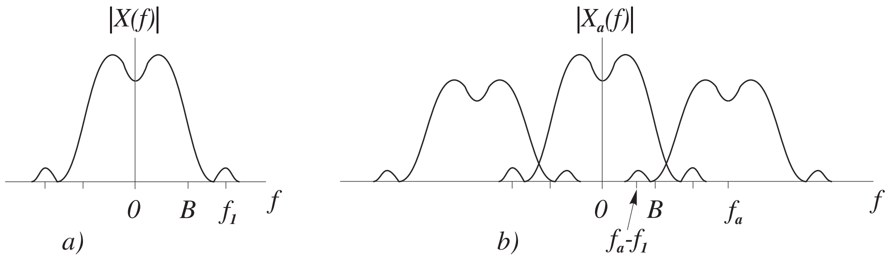

Figura 5.6: *Aliasing* espectral dos sinais da prática mesmo com $f_a > 2B$

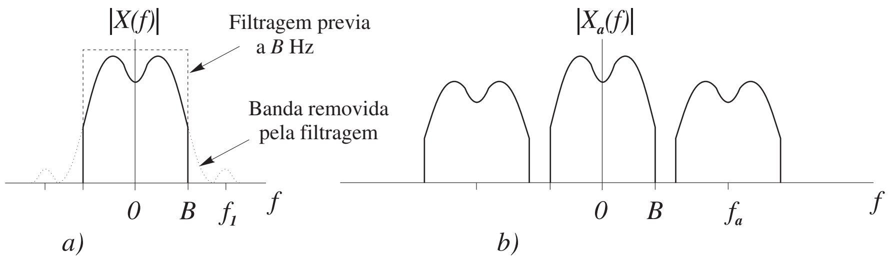

Figura 5.7: Filtragem prévia do sinal evitando o *aliasing* na amostragem

Na prática o sinal é amostrado por pulsos de duração praticamente nula $p_\delta(t)$. A amplitude instantânea da amostra resultante é depois *mantida* constante durante um certo tempo, o necessário para se completarem as operações subsequentes de digitalização, antes de voltar a zero.

O circuito da figura 5.8 *b)* modela este comportamento designado de *amostragem e manutenção*, ou *sample and hold*. O comutador I_2 está normalmente na posição 3. Quando o comutador I_1 "toca" na posição 1 o condensador é carregado *mantendo* aos seus terminais uma tensão igual à da amplitude da amostra. Ao fim de um certo tempo (antes da amostra seguinte) o comutador I_2 "toca" na posição 4 descarregando o condensador altura em que a tensão passa a zero. Os pulsos PAM resultantes possuem agora amplitude constante como se mostra na figura 5.8 *a)*.

Na prática não são utilizados comutadores mecânicos como as figuras 5.2 *c)* 5.8 *b)* sugerem. A comutação é feita por circuitos electrónicos, normalmente transistores, controlados por circuitos lógicos de temporização. A figura 5.8 *c)* mostra uma realização de um circuito *sample and hold* electrónico equivalente ao da figura 5.8 *b)*. Os comutadores são

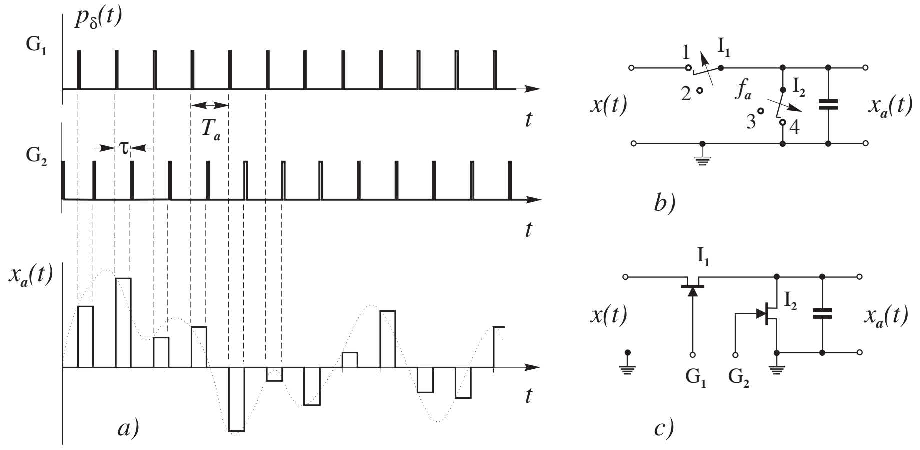

Figura 5.8: Amostragem e manutenção da amplitude *(sample and hold)*

transistores FET[2] cujas *gates* G_1 e G_2 são controladas por circuitos cuja temporização é a indicada na figura 5.8 *a)*, basicamente dois relógios à mesma frequência com G_2 atrasado em relação a G_1 de τ s.

5.2 Quantização

Por forma a codificar as amplitudes das amostras em números, aquelas só podem tomar um número finito de valores dentro do intervalo contínuo de variação do sinal. Este processo de discretização das amplitudes designa-se por *quantização.* Ao contrário da operação de amostragem, neste processo perde-se alguma informação sobre o sinal – que não é possível recuperar aquando da sua reconstituição – sob a forma de um *erro de quantização* o qual, para efeitos práticos, é equivalente a um ruído pois pode ser considerado uma amplitude que se adiciona ou se subtrai ao sinal original a fim de o levar a um dos níveis quânticos.

5.2.1 Quantização uniforme

Um *quantizador* divide o intervalo de variação das amplitudes das amostras, $x_a(t)$, em q intervalos, ou níveis quânticos, e aproxima-as ao nível mais

[2]Field Effect Transistor

próximo $x_q(t)$. Se os níveis quânticos estão igualmente espaçados entre si a quantização diz-se *uniforme*.

Por forma a visualizar a relação entre $x_a(t)$ e $x_q(t)$ considere-se que o sinal analógico foi normalizado a $|x(t)| \leq 1$. O quantizador uniforme sub-divide o intervalo $[-1, +1]$ das amplitudes de pico em q degraus de amplitude $2/q$ como mostra a figura 5.9 *a)*. Os níveis quânticos são então $\pm 1/q, \pm 3/q, \ldots, \pm(q-1)/q$ no caso usual em que q é um inteiro par. Uma amostra quantizada de amplitude $x_q(t_1) = 5/q$ resulta de qualquer amostra cuja amplitude esteja situada no intervalo $4/q < x_a(t_1) < 6/q$. O número de níveis quânticos q a utilizar em cada situação depende da

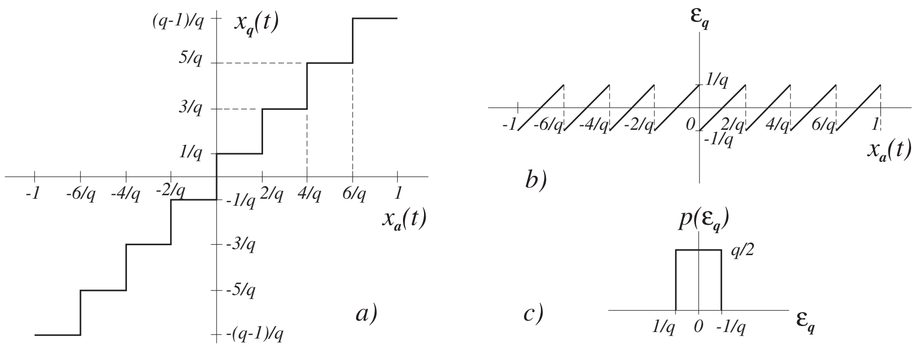

Figura 5.9: Funções característica e de erro da quantização uniforme

precisão com que se deseja representar digitalmente o sinal, ou seja, do número de dígitos, k, a utilizar. Regra geral a codificação é binária pelo que o valor de q mais aproriado será o de uma potência inteira de 2.

$$q = 2^k \qquad k = \log_2 q \tag{5.8}$$

A escolha de um valor para q determina também o erro ou ruído de quantização que será introduzido.

5.2.2 Ruído de quantização

O erro de quantização numa amostra, ϵ_q, será a diferença

$$\epsilon_q = x_a(t) - x_q(t) \tag{5.9}$$

Como se pode verificar na figura 5.9 *b)* o erro da quantização uniforme varia no intervalo $-1/q < \epsilon_q < +1/q$ e dado tratar-se de um intervalo normalmente muito pequeno, no qual se pode considerar que as amostras do sinal $x_a(t)$ se distribuem uniformemente, pode supor-se também que possui média nula e se distribui uniformemente nesse intervalo, tal como se mostra na figura 5.9 *c)* que representa a sua função de distribuição de probabilidade. Supondo que os valores do erro ϵ_q são independentes entre si, o seu valor quadrático médio $\overline{\epsilon_q^2}$ representa a potência do *ruido de quantização*, N_q. Assim, a potência do ruído de quantização é

$$N_q = \sigma_q^2 = \overline{\epsilon_q^2} = \int_{-1/q}^{1/q} \epsilon_q^2\, p(\epsilon_q)\, d\epsilon_q = \frac{q}{2}\int_{-1/q}^{1/q} \epsilon_q^2\, d\epsilon_q = \frac{1}{3q^2} \tag{5.10}$$

que mostra que o ruído de quantização decresce quando o número de níveis de quantização aumenta. A razão entre a potência do sinal e a potência do ruído de quantização é

$$\begin{aligned} \frac{S}{N_q} &= 3q^2 S \\ \frac{S}{N_q} &\leq 3q^2 \end{aligned} \tag{5.11}$$

pois como estamos a considerar $|x(t)| \leq 1$ também a sua potência média será $S \leq 1$. O resultado (5.11) é usualmente expresso em decibéis e em função do número de dígitos binários utilizados nos números que representam as amplitudes das amostras quantizadas, ou seja,

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N_q}\right)_{dB} &\leq 10\log_{10}(3 \times 2^{2k}) \quad \text{dB} \\ \left(\frac{S}{N_q}\right)_{dB} &\leq 4.8 + 6.0\,k \quad \text{dB} \end{aligned} \tag{5.12}$$

No telefone digital utilizam-se oito dígitos para codificar cada amostra do sinal de voz, pelo que $k = 8$ e portanto $(S/N_q)_{dB} \leq 52.8$ dB o que significa que a potência do ruído devido à quantização é cerca de 200 mil vezes inferior à do sinal o que representa uma fidelidade muito boa quando o objectivo é manter a inteligibilidade e a identificação do interlocutor.

5.2.3 Quantização não-uniforme

Verifica-se que os sinais analógicos de informação possuem elevados valores de crista, isto é, ao longo do tempo a sua amplitude situa-se mais frequentemente na zona das amplitudes baixas do que na zona das amplitudes altas, facto que pode ser descrito pela relação $x_{max} \gg x_{ef} = \sqrt{\overline{x^2}}$. Isto significa que a densidade de probabilidade das amplitudes $p(x)$ é maior na zona das amplitudes perto do valor médio do sinal (normalmente o zero) decrescendo até aos valores de pico como a figura 5.10 *a)* mostra. Uma análise semelhante à que foi feita na secção anterior mostra que o

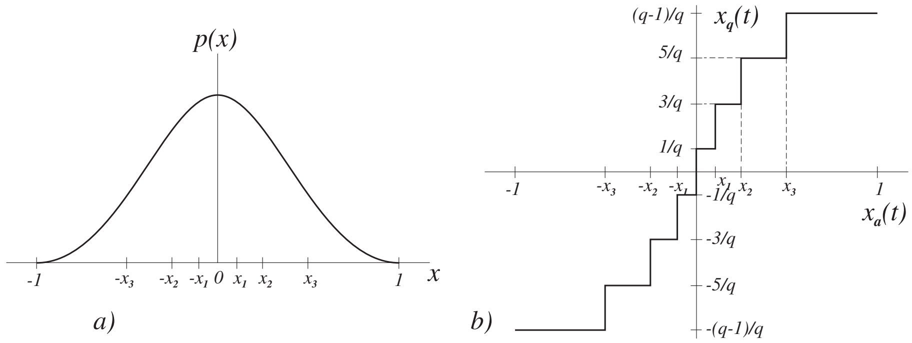

Figura 5.10: Fdp dos sinais e característica do quantizador não-uniforme

valor médio do erro de quantização e portanto também a potência do ruído de quantização é mínima se os limiares de transição $\pm x_1, \pm x_2, \ldots, \pm x_{q/2-1}$ dos níveis quânticos estiverem menos espaçados para as amplitudes mais baixas e mais espaçados nas amplitudes mais altas o que significa uma quantização *não-uniforme* ou *não-linear* tal como se exemplifica na figura 5.10 *b)*.

Porém, a realização de um quantizador não-uniforme é mais complexa e dispendiosa do que a dum quantizador uniforme. O que se faz então na prática é utilizar um quantizador uniforme após uma *compressão* não-linear do sinal, em que as características do compressor são determinadas a partir de estudos experimentais com sinais representativos.

A partir de considerandos teórico-práticos chegou-se à conclusão que a característica do *compressor* que melhor *uniformiza* a densidade de probabilidade das amplitudes dos sinais que aparecem na prática (em especial os sinais de audio) é linear a partir da amplitude zero e até um certo valor $(1/A)$ das amplitudes e depois logaritmica até ao seu valor máximo de acordo com a lei

$$y = \begin{cases} \dfrac{Ax}{1+\ln A} & \text{para} \quad |x| \leq \dfrac{1}{A} \\ \dfrac{1+\ln Ax}{1+\ln A} & \text{para} \quad \dfrac{1}{A} < |x| \leq 1 \end{cases} \tag{5.13}$$

designada por *lei-A* e representada graficamente na figura 5.11 *a)*. Assim, na prática, os sinais $x(t)$ são primeiramente comprimidos segundo esta lei, dando um sinal $y(t)$, o qual é depois amostrado e quantizado uniformemente dando o sinal $y_q(t)$. O sinal comprimido $y(t)$ é recuperado das suas amostras quantizadas $y_q(t)$ por filtragem (a menos do erro de quantização) o qual é depois *expandido* por multiplicação (analógica) pela função inversa de (5.13).

O conjunto dos procedimentos de *compressão* e *expansão* é designado de *companding*[3].

Nos casos práticos a lei-A de *companding* é aproximada por segmentos lineares. O declive de cada segmento representa a razão de compressão no correspondente intervalo de variação do sinal. Para a quantização a $q = 256$ níveis (8 bits) foi adoptada como norma uma aproximação poligonal de 13 segmentos em que o segmento central possui uma razão de compressão de 16:1 e as dos restantes estão em progressão geométrica de razão 1/2 como mostra a figura 5.11 *b)*. O sinal comprimido é depois

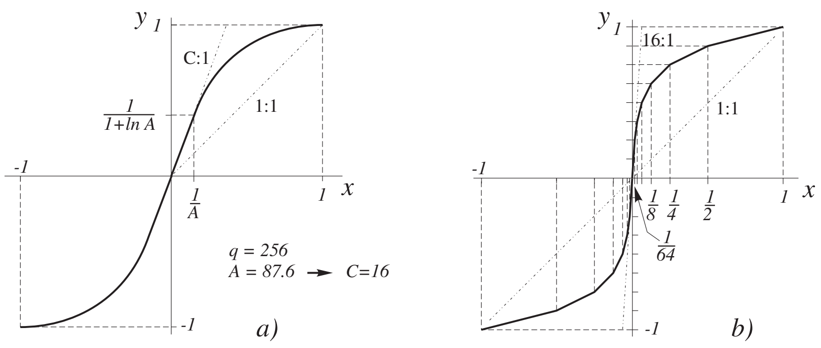

Figura 5.11: Compressor de lei-A e sua aproximação com 13 segmentos

quantizado uniformemente a 256 níveis.

[3]conjunção das designações em lingua inglesa compressing e expanding

Se um sinal analógico possuir uma função densidade de probabilidade de amplitude não-uniforme (do tipo da da figura 5.10 *a)*) e fôr quantizado uniformemente, os códigos binários das amostras irão conter mais zeros dos que uns, visto que a amplitude do sinal será mais frequentemente pequena do que grande, uma situação a evitar na transmissão, visto que depois de serializada, a sequência binária fica composta por dígitos binários de igual valor seguidos, podendo dificultar a sincronização. Por outro lado, como se verá quando se tratar a teoria da informação, uma ocorrência mais frequente de certos valores do que de outros, significa que os dígitos do código contêm uma quantidade de informação por dígito menor do que a que seria teoricamente possível com o número de dígitos utilizados para codificar as amostras. Ver-se-á também que uma alternativa à compressão antes da quantização é a compressão depois da quantização, como parte integrante da codificação.

Nos Estados Unidos da América a lei de quantização logarítmica adoptada difere da lei-A e é designada de *lei-*μ expressa na seguinte forma

$$y = \frac{\ln(1+\mu x)}{\ln(1+\mu)} \tag{5.14}$$

A característica de compressão da *lei-*μ possui um comportamento assintótico sendo

– linear para $x \ll 1/\mu$ e

– logaritmico para $1/\mu \ll x \ll 1$

Ambas as leis são objecto de normalização na Recomendação G.711 da ITU[4], a *lei-*A com $A = 87.6$ e a *lei-*μ com $\mu = 255$, e elas são de facto muito semelhantes. Contudo, a diferença das suas taxas de compressão na origem, $C_A = 16$ e $C_\mu \approx 46$ fazem com que a razão sinal-ruído de quantização seja melhor na *lei-*μ do que na *lei-*A para sinais fracos. E, também, a diferença entre as duas leis é suficientemente significativa de modo a tornar um compressor-A incompatível com um expansor-μ e vice-versa.

[4]International Telecommunications Union, organismo de normalização internacional em telecomunicações com sede em Geneve

5.3 Conversão analógico a digital

Uma vez quantizadas, as amostras constituem ainda uma amplitude analógica mas dado que se encontram discretizadas a q valores podem desde já ser consideradas valores digitais, isto é, representam números com apenas um dígito da base q. Na prática, porém, utilizam-se representações na base 2. É a conversão analógico-digital que executa esta conversão da base de numeração. Existem várias técnicas de conversão e aqui abordar-se-ão apenas duas, a Modulação de Impulso Codificada (MIC), ou PCM, e a Modulação Delta (MD), as mais usadas em comunicações.

5.3.1 Modulação de Impulso Codificada, MIC ou PCM

Os números binários resultantes da codificação das amostras quantizadas, com os dígitos serializados no tempo constituem uma sequência designada por *Modulação de Impulso Codificada* (MIC) ou, na designação inglesa, *Pulse Code Modulation* (PCM).

A figura 5.12 *a)* representa um conversor analógico-digital para $q = 8$ níveis de quantização uniforme. O quantizador está normalmente integrado no conversor e consiste no divisor de tensão constituido pelas resistências de $R\ \Omega$. Uma tensão de referência de 1 V é dividida em quatro intervalos iguais com limites em $1/4$, $1/2$ e $3/4$ V os quais são comparados com a amplitude das amostras rectificadas. Os comparadores produzem uma saída de valor lógico 1 sempre que a tensão da amostra $(+)$ fôr superior à tensão de referência correspondente $(-)$ e o valor lógico 0 em caso contrário. Assim, consoante o valor absoluto da amplitude duma amostra o conjunto das a saída dos comparadores mostrará os valores (000), (001), (011) ou (111) representativos do nível do sinal e que são depois convertidos em números de dois dígitos binários, a_0 e a_1 pelo bloco designado de *codificador binário* que realiza as funções de lógica combinatória apropriadas. Neste conversor A/D as amostras são rectificadas pelo facto dos níveis quânticos serem simétricos. Basta um comparador com zero da amostra $x_a(t)$ para determinar o sinal algébrico da amplitude, representado pelo valor do dígito a_2. Se assim não fosse, o conversor deveria ter um divisor de tensão de oito intervalos e sete comparadores. O número binário resultante

$$D = (a_2\, a_1\, a_0) = (-1)^{a_2}\, (2a_1 + a_0) \tag{5.15}$$

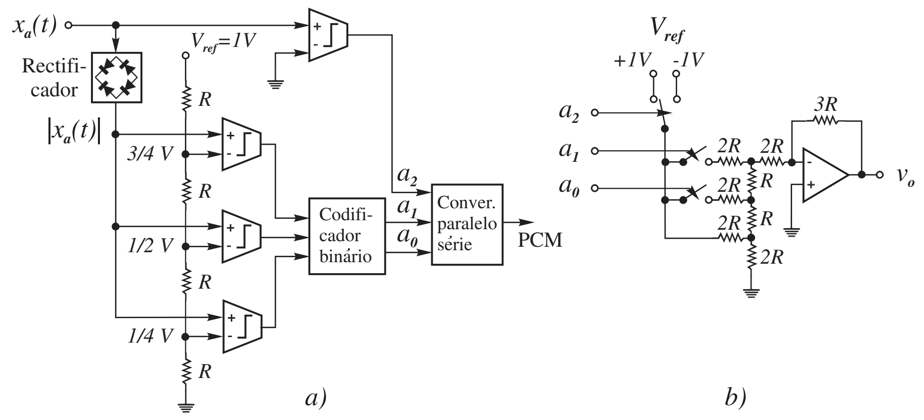

Figura 5.12: Conversão analógico-digital e digital-analógico

é depois serializado por um *conversor paralelo-série*, normalmente constituido por um registo de deslocamento, produzindo assim a sequência PCM. O código binário produzido por este conversor A/D é designado de código *dobrado* pois os números são simétricos sendo representados sob a forma de *sinal algébrico* e *mantissa inteira*. A tabela 5.1 mostra a correspondência entre os valores das amostras e o respectivo código PCM. A figura 5.13 exemplifica a saída PCM. Por cada amostra i é produzido

Tabela 5.1: Código binário PCM do conversor do exêmplo

$x_a(t)$	$x_q(t)$	a_2	a_1	a_0
1				
	7/8	1	1	1
3/4				
	5/8	1	1	0
1/2				
	3/8	1	0	1
1/4				
	1/8	1	0	0
0				
	$-1/8$	0	0	0
$-1/4$				
	$-3/8$	0	0	1
$-1/2$				
	$-5/8$	0	1	0
$-3/4$				
	$-7/8$	0	1	1
-1				

um número D_i de três bits. Donde se conclui que o ritmo binário de um

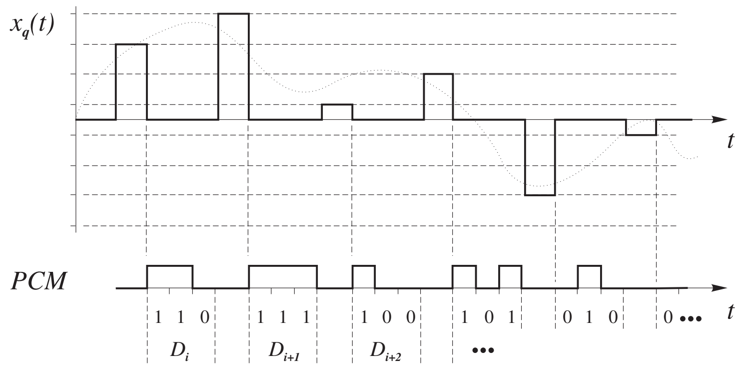

Figura 5.13: Sinal PCM resultante da codificação das amostras

canal PCM codificado a k bits por amostra é

$$r_c = k\, f_a \geq 2kB \tag{5.16}$$

e que a largura de banda exigida dum canal para transmissão digital é k vezes maior do que se a transmissão fosse feita analogicamente

$$B_T \geq \frac{r_c}{2} \geq kB \tag{5.17}$$

Na figura 5.12 *b)* representa-se o conversor digital-analógico, inverso deste, que recebe como entrada o número digital depois de paralelizado e produz uma tenão analógica de valor

$$v_0 = \frac{(-1)^{a_2}}{8}\,(4a_1 + 2a_0 + 1) \tag{5.18}$$

que reproduz a amplitude da amostra quantizada, isto é, $x_q(t) = v_0(t)$. Este conversor é constituido por uma malha de resistencias em *escada* arranjadas de modo a que quando o valor de um dos dígitos binários é igual a 1 é introduzida no ponto da malha à entrada do amplificador operacional, uma corrente proporcional à posição desse dígito no número binário. A malha adiciona algebricamente as contribuições de cada um dos dígitos somando analogicamente as respectivas correntes efectuando exactamente as operações indicadas na equação 5.18. A malha está concebida por forma a exigir apenas resistências de 3 valores distintos (R, $2R$, e $3R$) qualquer que seja o número de dígitos do conversor.

O conversor da figura 5.12 *a)* que serviu de exêmplo a esta discussão utiliza o método da comparação simultânea. É o método mais rápido de conversão dado que todos os dígitos são determinados ao mesmo tempo. Exige 2^{k-1} comparadores, isto é, por cada dígito por amostra o número de comparadores duplica o que, mesmo para valores moderados de k, representa alguma complexidade e um custo significativo. Existem porém outros métodos de conversão como por exêmplo os que recorrem a *aproximações sucessivas* em que os dígitos do código vão sendo determinados sucessivamente ao ritmo de um relógio, ou os métodos *diferenciais* em que o que é codificado é a diferença de amplitude entre amostras sucessivas e não as amplitudes das amostras em si. Nos métodos *preditivos* o conversor *estima*, por extrapolação, o valor da amostra seguinte e quando ela chega ao conversor este determina o erro da *estimativa* e é este valor que ele codifica e transmite.

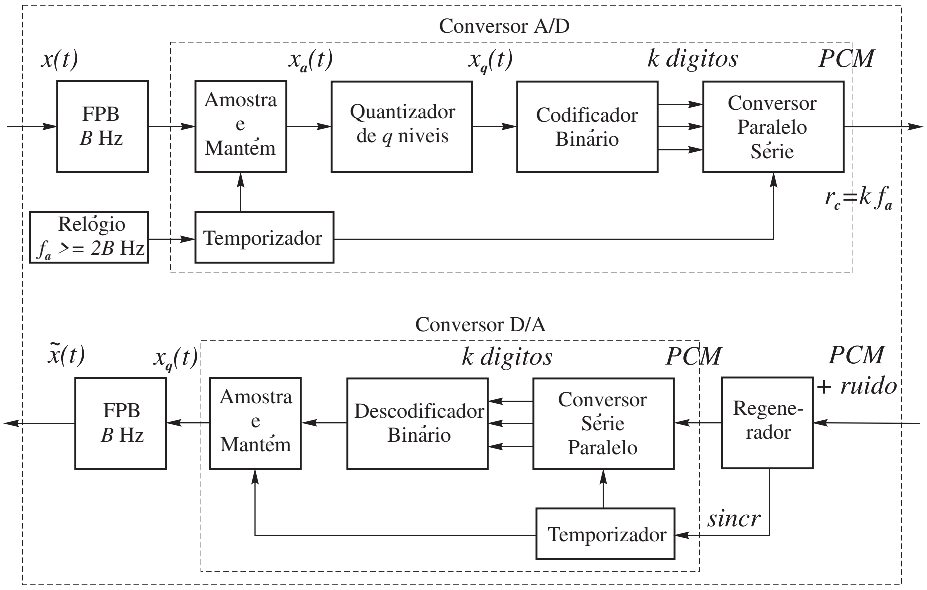

Figura 5.14: Esquema simplificado de um Codec PCM

Interessa notar que tanto o conversor A/D como o D/A normalmente integram num único bloco funcional as diferentes fases do processo de digitalização até aqui referidas (amostragem, quantização e codificação) bem como a temporização que as regulam, já que na maior parte das realizações físicas não é possivel nem prático separá-las. Os conversores A/D e D/A são normalmente fabricados aos pares e o conjunto é denominado um *Codec*[5]. O transmissor do *codec* é o conversor A/D e o receptor é o conversor D/A cada um deles ligado a um canal distinto do sistema de transmissão digital. A figura 5.14 ilustra estes conceitos.

A representação digital de alguns sinais analógicos mais utilizados em telecomunicações tais como a telefonia (voz), a música e o vídeo, têm sido normalizadas pela ITU permitindo a compatibilidade entre os diversos sistemas que são realizados industrialmente. A tabela 5.2 indica os parâmetros normalizados para alguns sinais.

Tabela 5.2: Valores de digitalização PCM de alguns sinais típicos

Sinais telefónicos (ITU, Recomendação G.711)	
Frequência de amostragem:	$f_a = 8$ KHz
Quantização:	não-uniforme a $q = 256$ níveis
Palavra PCM:	$k = 8$ bits
Ritmo binário (um canal):	$r_b = k\,f_a = 64$ Kbps
Lei de quantização Europeia:	compressão digital segundo a *lei-A*, com 13 segmentos.
Código:	binário dobrado com inversão dos bits de ordem par.
Lei de quantização Americana:	compressão digital segundo a *lei-μ*, com 15 segmentos.
Código:	binário dobrado com inversão de todos os bits excepto o primeiro (bit do sinal)
Sinais de Vídeo (Televisão)	
Frequência de amostragem:	$f_a = 13.3$ MHz
Quantização:	uniforme com $k = 8$ ou 9 bits
Gravação de Música	
Frequência de amostragem:	$f_a = 44.1$ KHz
Quantização:	uniforme com $k = 16$ bits
Ritmo binário:	$r_b \approx 0.7$ Mbps

[5] conjunção das designações em língua inglesa <u>Co</u>der e <u>dec</u>oder

Tabela 5.2 (cont.)

Transmissão de Música	
Frequência de amostragem:	$f_a = 32$ KHz
Quantização:	uniforme com $k = 14$ bits
Ritmo binário:	$r_b = 448$ Kbps ou
Quantização:	não-uniforme com $k = 12$ bits
Ritmo binário:	$r_b = 384$ Kbps
Lei de quantização:	*lei-A* com 5 segmentos ou
Quantização:	não-uniforme com $k = 10$ bits
Ritmo binário:	$r_b = 320$ Kbps
Lei de quantização:	*lei-A* com 13 segmentos

5.3.2 Ruído em PCM

Devido ao ruído no canal de transmissão os bits que constituem o código binário de cada amostra podem ser corrompidos e mudar de valor. Um erro no bit da posição m tem como consequência que o nível quântico em que a correspondente amostra irá ser descodificada estará desviado de uma quantidade $\epsilon_m = \pm(2/q) \cdot 2^m$ em relação ao que seria o correcto. ϵ_m é uma variável aleatória que representa a amplitude do ruído que se manifesta na posição m. A potência média deste ruído é dada pelo valor quadrático médio (para todas as k possíveis posições):

$$\overline{\epsilon_m^2} = \frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\left(\frac{2}{q}\,2^m\right)^2 = \frac{4}{kq^2}\sum_{m=0}^{k-1}4^m = \frac{4}{kq^2}\,\frac{4^k-1}{3} = \frac{4}{3k}\,\frac{q^2-1}{q^2} \approx \frac{4}{3k} \tag{5.19}$$

potência[6] que está associada sómente às amostras que sofreram erro e que constituem apenas uma fracção da totalidade das amostras transmitidas. Uma amostra estará errada se na totalidade dos k bits que a constituem ocorrerem um ou mais bits em erro. A probabilidade disto acontecer dá então a referida fracção das amostras erradas. Esta probabilidade é dada pela lei (distribuição) binomial

$$\text{Prob(amostra errada)} \quad = \quad \text{Prob(bits errados} \geq 1)$$

[6] a soma dos k primeiros termos de uma série geométrica de razão z é $S_k = \frac{1-z^k}{1-z}$ e considerou-se que $q^2 \gg 1$ e portanto $\frac{q^2-1}{q^2} \approx 1$

$$= \sum_{i=1}^{k} C_i^k P_e^i (1-P_e)^{k-i} \approx k\, P_e \qquad (5.20)$$

onde P_e é a probabilidade de erro por bit, referida no capítulo 4, que depende da razão de potências sinal-ruído (S/N) no canal de transmissão e do código de linha utilizado (polar, unipolar, etc). Para o resultado obtido em (5.20) considerou-se a aproximação $P_e \ll 1$, o que é verdade nos sistemas de transmissão da prática, pelo que a soma é praticamente igual ao valor da primeira parcela o que por sua vez equivale a dizer que na prática as amostras erradas contêm apenas um erro[7].

Portanto a potência do ruído (do erro) de descodificação é

$$N_d = k\, P_e\, \overline{\epsilon_m^2} = k\, P_e\, \frac{4}{3k} = \frac{4\, P_e}{3} \qquad (5.21)$$

e a potência total do ruído no destino será a soma deste ruído com o de quantização $N_q = 1/(3q^2)$ (equação 5.10) visto que estes dois ruídos são produzidos por processos essencialmente independentes:

$$N_D = N_d + N_q = \frac{4\, P_e}{3} + \frac{1}{3q^2} = \frac{1 + 4q^2\, P_e}{3q^2} \qquad (5.22)$$

e

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D \leq \frac{3q^2}{1 + 4q^2\, P_e} \qquad (5.23)$$

ou seja

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D \leq \begin{cases} 3q^2 & \text{se} \quad P_e \ll \dfrac{1}{4q^2} \\ \dfrac{3}{4\, P_e} & \text{se} \quad P_e \gg \dfrac{1}{4q^2} \end{cases} \qquad (5.24)$$

o que significa que o ruído de quantização é a componente dominante da qualidade da digitalização quando a P_e na transmissão (ou gravação) é pequena, mas o ruído de descodificação devido aos erros na transmissão (ou gravação) passa a ser a mais significativo quando a P_e é grande comparada com $1/(4q^2)$.

[7] é fácil de verificar que a probabilidade de ocorrerem dois ou mais erros num bloco de k dígitos é muito inferior à probabilidade de ocorrer apenas um erro se a probabilidade de erro fôr muito inferior a 1

5.3.3 Modulação Delta

Consideremos um outro tipo de conversor muito utilizado na digitalização de sinais de informação, especialmente na gravação digital, designado de *Modulador Delta*. Para sinais de audio, por exêmplo, verifica-se que a qualidade obtida com o modulador delta é semelhante à obtida com PCM exigindo aquele um menor número de bits por amostra e o modulador delta é tão ou mais simples de realizar do que o codificador PCM.

O princípio de funcionamento do conversor por modulação delta é semelhante ao dos conversores por aproximações sucessivas que é o seguinte: Faz-se uma conversão A/D com um intervalo de quantização grande e toma-se o número binário resultante como primeira aproximação ao sinal digitalizado. Depois converte-se a analógico esta aproximação e compara-se o valor obtido com o valor do sinal, convertendo-se a digital a sua diferença. O processo repete-se até que a diferença seja inferior ao erro de quantização desejado. Cada uma das aproximações analógicas quantizadas ao sinal original constitui uma *estimativa* $\widetilde{x}_q(t)$ do sinal analógico.

Modulação Delta Linear

A figura 5.15 representa duas versões simplificadas do modulador delta e a figura 5.16 as formas de onda em vários pontos da versão *a)* do circuito.

O sinal analógico $x(t)$ e a sua estimativa quantizada $\widetilde{x}_q(t)$ são continuamente apresentados a um comparador cuja saída será o valor lógico 1 (representado por uma tensão V_o volts) ou o valor lógico 0 (representado por uma tensão de 0 volts) consoante o valor à entrada $+$ fôr, respectivamente, maior ou menor que o da entrada $-$ que é depois amostrado ao ritmo do relógio do conversor e a amplitude mantida durante todo o perído de amostragem sendo dividida em duas tensões eléctricas simétricas que constituem os valores do erro quantizado $\epsilon_q(t)$:

$$\epsilon_q(t) = \begin{cases} +\Delta = +\dfrac{V_0}{2} & \text{se} \quad x(t) \geq \widetilde{x}_q(t) \\ -\Delta = -\dfrac{V_0}{2} & \text{se} \quad x(t) < \widetilde{x}_q(t) \end{cases} \tag{5.25}$$

É o sinal de erro quantizado $\epsilon_q(t)$, que constitui a digitalização do sinal analógico, que é transmitido.

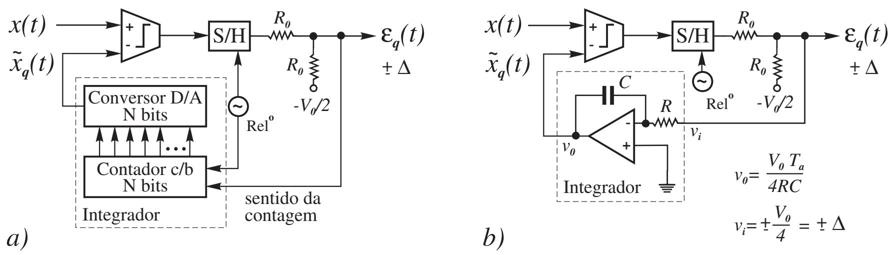

Figura 5.15: Circuitos para digitalização por modulação delta linear

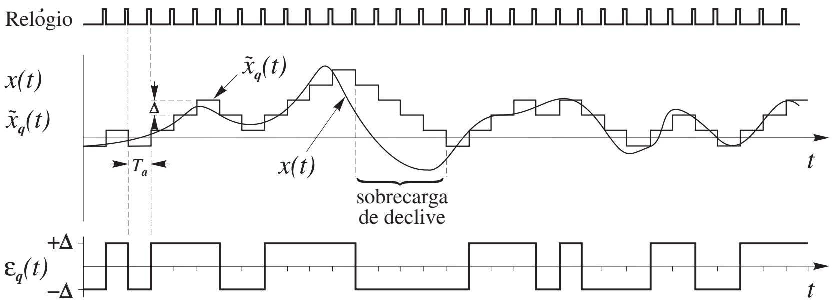

Figura 5.16: Formas de onda na modulação delta linear

Seja $t_i = i\,T_a$ um instante de amostragem. A estimativa $\widetilde{x}_q(t_{i+1})$ é calculada da seguinte forma: Se $\epsilon(t_i) = +\Delta$, o que significa que $x(t_i) \geq \widetilde{x}_q(t_i)$, então aumentar $\widetilde{x}_q(t_i)$ de um *quantum* Δ; se $\epsilon(t_i) = -\Delta$, o que significa que $x(t_i) < \widetilde{x}_q(t_i)$, então diminuir $\widetilde{x}_q(t_i)$ de um *quantum* Δ, ou seja, pela equação recursiva de diferenças:

$$\widetilde{x}_q(t_{i+1}) = \widetilde{x}_q(t_i) + \epsilon_q(t_i) \tag{5.26}$$

que representa uma integração no tempo. Esta integração pode ser realizada quer sob a forma digital através de um contador *para-cima-para-baixo*[8] com comando de sentido de contagem cuja saída é convertida a analógico, conforme se ilustra na figura 5.15 *a)*, quer directamante sob a forma analógica através de um integrador analógico constituido por um amplificador operacional devidamente realimentado como se ilustra na figura 5.15 *b)*. Com um integrador analógico, como será fácil de verificar, $\widetilde{x}_q(t)$ não tem a forma de degraus mas sim de rampas de declive

[8] *up-down counter*

$\pm V_0/4RC$ visto que a tensão de saída do amplificador, em função de T_a, é $v_0 = V_0 T_a/4RC$.

É fácil de verificar que o receptor de um modulador delta, ou seja o correspondente conversor digital a analógico, terá de receber o erro quantizado $\epsilon_q(t)$ e produzir a estimativa $\tilde{x}_q(t)$ do sinal original que posteriormente será filtrada de modo a reproduzir o sinal analógico original. Portanto o receptor será constituido simplesmente por um circuito idêntico ao circuito de realimentação do modulador delta que se mostra na figura 5.17 para o caso digital.

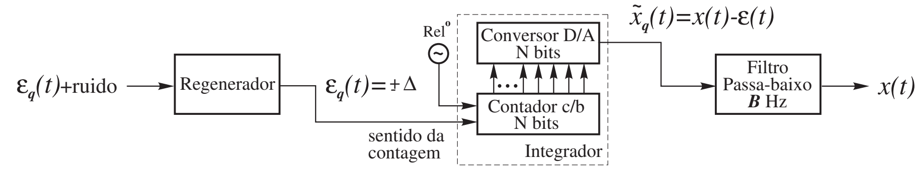

Figura 5.17: Receptor de Modulação Delta linear

A designação Modulador Delta (MD[9]) reflecte o facto de que cada amostra é codificada num único pulso de amplitude $+\Delta$ ou $-\Delta$. Mas também se pode considerar que $\epsilon_q(t)$ é uma *forma de onda binária* com um ritmo de sinalização de $r_b = f_a$, ou seja, *um bit por amostra*. Por esta razão a MD também é por vezes designada de *PCM de um-bit*. Estando-se a transmitir no canal ao ritmo $r_c = r_b$ então a largura de banda exigida pela MD é

$$B_T \geq \frac{r_c}{2} = \frac{f_a}{2} \geq B \tag{5.27}$$

consistentemente com as equações 5.16 e 5.17.

Consegue-se um bit por amostra porque se está a transmitir apenas o erro de estimativa e não o valor da amostra. Esta concepção é, no entanto, um tanto falaciosa porque na realidade é necessária uma frequência de amostragem superior de modo a resolver as situações de *sobrecarga de declive* que a figura 5.16 *a)* também ilustra. Uma sobrecarga de declive surge sempre que a variação da amplitude do sinal excede a velocidade com que a estimativa quantizada a pode acompanhar dando origem a erros superiores ao do *ruído granular* produzido pela própria quantização. De modo a se evitarem estas situações há que impôr a condição de que o

[9]DM, *Delta Modulator*

declive dos degraus (Δ/T_a) que constituem a estimativa do sinal quantizado nunca seja inferior ao declive máximo do sinal (obtido da derivada deste)

$$f_a\,\Delta \;\geq\; \left|\frac{dx(t)}{dt}\right|_{max} \tag{5.28}$$

donde, para manter esta relação verdadeira e um Δ fixo, se terá que aumentar a frequência de amostragem f_a.

Exêmplo 5.1 *Considere-se que o sinal é sinusoidal* $x(t) = A\cos(2\pi f_1 t)$. *Tem-se* $dx(t)/dt = -2\pi f_1 A \sin(2\pi f_1 t)$ *e* $|dx(t)/dt|_{max} = 2\pi f_1 A \leq 2\pi B$, *dado que* $f_1 \leq B$ *e que se tem estado a considerar que* $A \leq 1$. *A equação 5.28 exige então que*

$$f_a \geq 2\pi B/\Delta \gg \pi B \tag{5.29}$$

pois dever-se-á ter $\Delta \ll 2$ *para que os níveis quânticos de* $\widetilde{x}_q(t)$ *sejam pequenos comparados com a amplitude pico-a-pico do sinal* $-1 \leq x(t) \leq +1$.

A determinação de uma expressão para a potência do ruído de quantização e consequentemente para a razão sinal-ruído na MD, tem de ter em consideração a condição imposta pela desigualdade 5.28 tornando-se um pouco mais complexa do que para o caso do PCM. Apenas se referirá que para atingir a mesma razão entre aquelas potências, isto é, para uma digitalização com a mesma qualidade, a MD exige uma maior largura de banda do que o PCM podendo ser entre duas a três vezes maior. O exêmplo seguinte dá uma ideia destes valores.

Exêmplo 5.2 *Um sinal de voz pré-filtrado a* $B = 4$ *KHz digitalizado em PCM binário com* $k = 7$ *bits por amostra produz um ritmo binário de* $r_b = kf_a \geq 56$ *kbps e exige uma banda de transmissão* $B_T \geq 28$ *KHz. O mesmo sinal digitalizado por Modulação Delta com a mesma qualidade (mesma razão sinal-ruído de granularidade) produz um ritmo binário* $r_b = f_a \approx 2 \times 16 \times B = 128$ *kbps exigindo portanto uma largura de banda de transmissão* $B_T \geq 64$ *KHz.*

Modulação Delta Adaptativa

Uma alternativa ao aumento da frequência de amostragem para reduzir a sobrecarga de declive, sem aumentar o ruído granular, é efectuar a quantização com *degraus de altura variável*. Pode verificar-se que quando ocorre uma sobrecarga de declive os pulsos $\epsilon_q(t)$ têm a mesma polaridade, correspondendo a degraus sucessivos também com a mesma polaridade. Se sempre que se detectar que o degrau seguinte vai ter a mesma polaridade, se aumentar a amplitude do degrau, força-se $\widetilde{x}_q(t)$ a aproximar-se mais rapidamente de $x(t)$.

Uma forma de realizar esta *adaptação* da altura do degrau a partir, por exêmplo, do esquema do MD da figura 5.15 *a)*, é actuar sobre a tensão de referência do conversor D/A através de um factor $1 < K < 2$ sempre que a polaridade se mantenha positiva e de um factor $1/K$ sempre que ela se mantenha negativa. Um circuito *controlador do degrau* fornece esta tensão de referência em função do sinal do degrau anterior conforme se representa no esquema da figura 5.18 que representa um *Modulador Delta Adaptativo* e que se rege agora pela equação de diferenças

$$\widetilde{x}_q(t_{i+1}) = \widetilde{x}_q(t_i) + g(t_i)\,\epsilon_q(t_i) \tag{5.30}$$

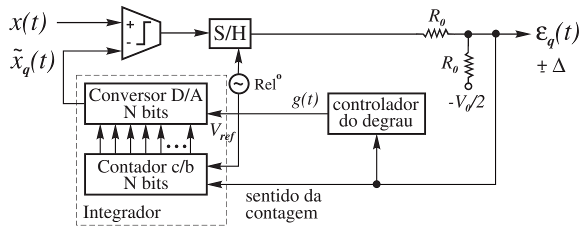

Figura 5.18: Modulador Delta Adaptativo

em que $g()$ representa um *ganho* definido por

$$g(t_i) = \begin{cases} g(t_{i-1}) \times K & \text{se} \quad \epsilon_q(t_i) = \epsilon_q(t_{i-1}) \\ g(t_{i-1})/K & \text{se} \quad \epsilon_q(t_i) \neq \epsilon_q(t_{i-1}) \end{cases} \tag{5.31}$$

Na figura 5.19 representa-se a digitalização por modulação delta adaptativa, com $K \approx 1.5$, da zona do sinal da figura 5.16 onde se verificava uma acentuada sobrecarga de declive. Pode observar-se que sempre que a polaridade se mantém igual à do degrau anterior os degraus vão aumentando de amplitude, a aproximação ao sinal analógico é mais rápida e consequentemente a sobrecarga de declive é menos acentuada e dura muito menos tempo.

Neste capítulo não se pretende estudar em detalhe a conversão A/D e D/A mas interessa referir que existem diversas outras técnicas que têm

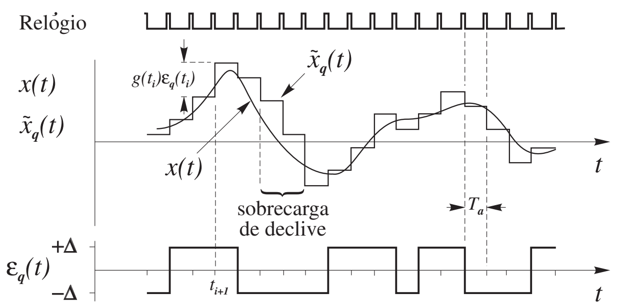

Figura 5.19: Formas de onda na modulação delta adaptativa

vindo a ser concebidos na procura de soluções que consigam reduzir ao mínimo o número de bits por amostra necessários à representação o mais fiel possível dos sinais analógicos sob a forma digital e, consequentemente, reduzir ou o ritmo binário na linha quando da sua transmissão, ou o espaço total de *memória* se o objectivo é a sua gravação digitalizada em suportes magnéticos ou ópticos como é o caso dos discos compactos (CD) ou dos ficheiros de computador em disco magnético. A tabela 5.3 compara, nestes aspectos, as características de diversos métodos utilizados na codificação de audio com qualidade telefónica.

Tabela 5.3: Comparação entre vários métodos de codificação

Método de codificação	Sigla	f_a KHz	Bits por amostra	Ritmo Kbps
Modulação de Impulso Codificado	PCM	8	7–8	56–64
Mod de Imp Codif Diferencial	DPCM	8	4–6	32–48
Mod de Imp Codif Dif Adaptativa	ADPCM	8	3–4	24–32
Modulação Delta	DM	64–128	1	64–128
Modulação Delta Adaptativa	ADM	48–64	1	48–64
Codificação Preditiva Linear	LPC	0.04–0.1	≈ 80	3–8

5.4 Problemas

5.1 – Um sinal de banda de base, $x(t)$, tem por espectro

$$X(f) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|f|}{200} & \text{para} \quad |f| < 200 \\ 0 & \text{para} \quad |f| \geq 200 \end{cases}$$

a) Suponha que $x(t)$ é amostrado idealmente a $f_a = 300$ Hz. Esquematize o espectro de $x_a(t)$ para $|f| < 200$ Hz.

b) Repetir *a)* com $f_a = 400$ Hz.

5.2 – Um sinal $x(t) = 2\cos(400\pi t) + 6\cos(640\pi t)$ é amostrado idealmente a $f_a = 500$ Hz. Se o sinal amostrado passar através de um filtro passa-baixo ideal com frequência de corte de 400 Hz, que componentes de frequência aparecem à saída do filtro?

5.3 – Um sinal de banda passante possuindo o espectro de amplitude da figura 5.20 é amostrado idealmente. Esquematize o espectro do sinal amostrado quando $f_a = 20$, 30 e 40 Hz. Para cada um dos casos,

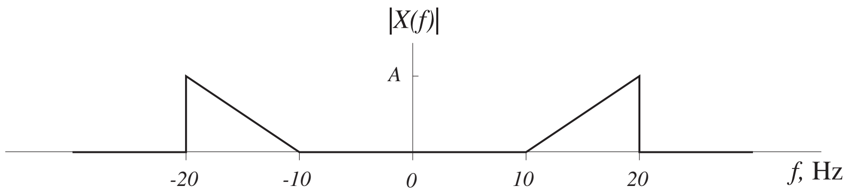

Figura 5.20:

verifique se o sinal analógico original pode ser recuperado a partir das amostras e, caso afirmativo, mostre como.

5.4 – A figura 5.21 mostra a função de densidade de probabilidade $p(x)$ das amplitudes das amostras de um sinal analógico $x(t)$. Defina um quantizador uniforme de quatro níveis para este sinal e calcule o valor da razão entre as potências do sinal e do ruído de quantização.

5.5 – a) Defina um quantizador não-uniforme de quatro níveis de erro quadrático médio mínimo para a função de densidade de probabilidade da figura 5.21.

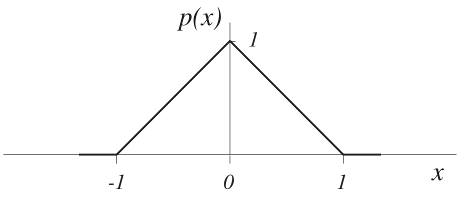

Figura 5.21:

b) Calcule a razão de potências sinal-ruído de quantização para esse quantizador.

c) Defina um compressor e um expansor tais que a quantização não-uniforme possa ser efectuada utilizando esse compressor e um quantizador uniforme.

5.6 – Os q níveis x_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ de quantização são por vezes escolhidos de modo a que as amplitudes quantizadas do sinal ocorram com igual probabilidade, isto é, $p(x_i) = 1/q$.

a) Defina um quantizador de quatro níveis de igual probabilidade para a função de densidade de probabilidade $p(x)$ do problema 5.4

b) Compare a razão de potências sinal-ruído de quantização do quantizador de igual probabilidade com a do quantizador de erro quadrático médio mínimo (Prob 5.5).

5.7 – Um sinal analógico com $B = 15$ KHz deve ser quantizado a $q \geq 200$ níveis e transmitido em PCM M-ário com $M = 2^n$. Determinar os valores máximos permissíveis para k e f_a e o correspondente valor de n se a largura de banda de transmissão disponível fôr $B_T = 50$ KHz.

5.8 – Repetir o problema 5.7 com $B_T = 80$ KHz

5.9 – A *hiperquantização* é o processo pelo qual N amostras quantizadas sucessivas são representadas por um único pulso de q^N amplitudes possíveis. Descreva como é que através do PCM hiperquantizado se pode obter uma *compressão de banda*, de modo a que $B_T < B$.

5.10 – Suponha que o erro de quantização ϵ_q não pode ser superior a P % da amplitude pico-a-pico do sinal. Determinar uma expressão para k em função da base de numeração M e de P.

5.11 – Conceba um circuito lógico para o codificador binário do conversor A/D da figura 5.12.

5.12 – Esquematize circuitos equivalentes aos da figura 5.12 para conversores de 4 bits.

5.13 – Um sinal de voz com $B = 3$ KHz e $S = 1/4$ deve ser transmitido em PCM M-ário. Determinar valores para a base de numeração M, número de dígitos k, e frequência de amostragem f_a, de modo a que $S/N \geq 40$ dB se $B_T = 16$ KHz.

5.14 – Repetir o problema 5.13 com $S/N \geq 36$ dB e $B_T = 20$ KHz.

5.15 – Um sinal de audio com potência média normalizada $S = 0.3$ deve ser transmitido por um sistema PCM cujos parâmetros devem satisfazer o padrão de qualidade de radiodifusão audio.

a) Se a base de numeração fôr $M = 2$ quais os valores exigidos para o número de dígitos k e para B_T?

b) Se $B_T = 4B$ então qual o valor mínimo para M?

banda de audio para radiodifusão: 100 Hz a 5 KHz,
padrão de qualidade: $S/N = 40$ a 50 dB

5.16 – Repetir o problema 5.15 para o padrão de qualidade de audio de alta fidelidade.
banda de audio Hi-Fi: 20 Hz a 20 KHz,
padrão de qualidade: $S/N = 55$ a 65 dB

5.17 – No Modulador Delta da figura 5.15 *a)*, $x(t)$ é o sinal sinusoidal $x(t) = 0.1 \sin 2\pi \times 10^3 t$. A frequência do relógio é de 2×10^4 Hz e a altura do degrau é de $\Delta = 20$ mV. Esquematize as formas de onda $x(t)$, $\widetilde{x}_q(t)$ e $\epsilon_q(t)$. Suponha que $x - \widetilde{x}_q = \Delta$ quando $t = 0$.

5.18 – Repetir o problema 5.17 para $\Delta = 4$ mV e para $\Delta = 60$ mV. Notar que $\Delta = 20$ mV fornece a melhor estimativa $\widetilde{x}_q(t)$. Mostre que a melhor altura do degrau é $\Delta_{opt} \approx 4A/(f_a/f_m)$ onde A e f_m são a amplitude de pico e a frequência do sinal sinusoidal.

fim do capítulo 5