Capítulo 4

Ruído e Erros

Todos os sinais de comunicação úteis, sob o ponto de vista do destinatário da informação, são aleatórios ou imprevisíveis. De facto, a *comunicação* não teria nenhum interesse se o destinatário tivesse conhecimento antecipado do comportamento exacto do sinal que irá receber dado que, se tal acontecesse, a *informação* recebida seria nula (como se justificará mais adiante) e não seria necessária a transmissão! Aquilo que o receptor conhece são as características gerais dos sinais utilizados na comunicação, como por exêmplo a sua largura de banda, a densidade espectral de potência, o código e a técnica de modulação utilizados para os símbolos da fonte, etc.

Assim, na impossibilidade de se lidar com descrições matemáticas determinísticas dos sinais de informação há que recorrer a descrições probabilísticas, em que os sinais são modelados por *processos aleatórios*.

Por outro lado, em qualquer sistema de transmissão, para além dos sinais de informação originados pela fonte, estão presentes outros sinais indesejáveis, genericamente designados por *ruído*, os quais não é possível eliminar totalmente.

O *ruído* é intrinsecamente aleatório dada a natureza dos fenómenos que o originam pelo que também devem ser descritos como *processos aleatórios*.

Mais propriamente, os sinais aleatórios são a manifestação de *processos aleatórios* ou *estocásticos* que têm lugar ao longo do tempo.

Este capítulo aborda os fundamentos da descrição de sinais por processos aleatórios e em especial a descrição do *ruído*, as suas características mais importantes e a forma como este afecta as comunicações.

4.1 Sinais aleatórios

A figura 4.1 mostra algumas das formas de onda, $s_1(t)$, $s_2(t)$, ..., $s_i(t)$, correspondentes à emissão de diferentes mensagens por uma fonte de informação. A mensagem concreta que é emitida em cada instância é pois desconhecida à priori, sendo portanto imprevisível a forma de onda (sinal) que irá ser produzida. O *conjunto* de todas as formas de onda

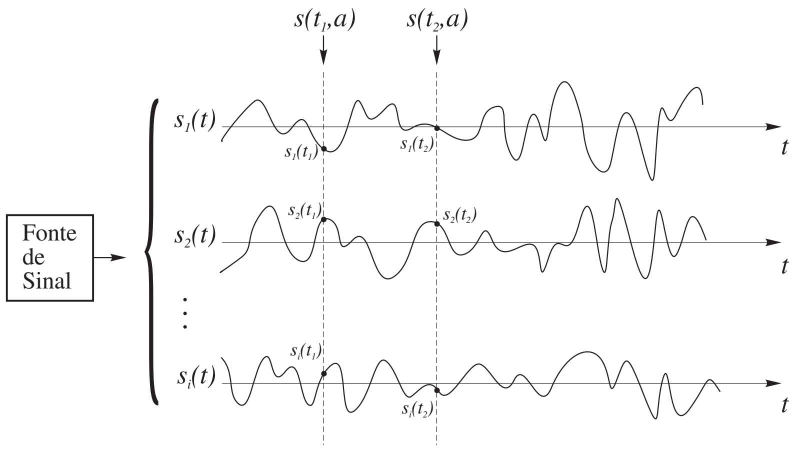


Figura 4.1: Formas de onda num conjunto $s(t, a)$

capazes de serem geradas pela fonte pode então ser representado formalmente pela função $s(t, a)$, em que cada elemento do conjunto, designado *função amostra*, corresponde a um determinado sinal, por exêmplo, $s_i(t) = s(t, a_i)$.

O argumento fulcral que faz da função $s(t, a)$ um processo aleatório é a assumpção de que, quando se está a observar uma *função amostra*, não se sabe de qual das amostras a_i se trata. Portanto, num instante t_1 pode ocorrer *qualquer* valor do conjunto dos possíveis valores $s(t_1, a)$, o que significa que $s(t_1, a)$ constitui uma *variável aleatória*[1] que toma valores definidos por $s(t, a_1)$, $s(t, a_2)$, ..., $s(t, a_i)$ no instante $t = t_1$.

Do mesmo modo, $s(t_2, a)$ constitui outra *variável aleatória* que toma va-

[1]apesar desta designação, uma *variável aleatória* não é nem variável nem aleatória! É uma *função* que toma valores numéricos bem definidos em consequência da ocorrência de resultados de uma experiência que consiste na escolha, ao acaso, dos possíveis resultados dessa experiência

lores definidos por $s(t, a_1)$, $s(t, a_2)$, ..., $s(t, a_i)$ no instante $t = t_2$, isto é, no conjunto $\{s(t_2, a_1), s(t_2, a_2), ..., s(t_2, a_i)\}$.

Assim, um processo aleatório $s(t, a)$ que passamos a designar por $s(t)$, omitindo a referência a a, não é mais do que uma família de variáveis aleatórias $s(t_1)$, $s(t_2)$, ..., $s(t_i)$, cujas funções de probabilidade descrevem o processo aleatório nos respectivos instantes de tempo.

Se, por exêmplo, a *função de densidade de probabilidade* (*fdp*) de $s(t_1)$ fôr $p_1(s_1)$, em que a variável auxiliar s_1 não deve ser confundida com a função amostra $s_1(t) = s(t, a_1)$, a probabilidade do evento $s(t_1) \leq A$ pode ser obtida integrando $p_1(s_1)$ em $]-\infty, A]$ e o 1º momento, ou valor médio, $\overline{s(t_1)}$ pode ser obtido através da fórmula usual da esperança matemática de uma variável aleatória (eq 4.1).

Da mesma maneira, conhecida a *fdp* de $s(t_2)$, $p_2(s_2)$, se poderia calcular a probabilidade $P[s(t_2) \leq A]$ e a média $\overline{s(t_2)}$, cujos valores seriam, em geral, diferentes dos obtidos para $s(t_1)$.

Médias de conjunto

Designemos por $p(s, t)$ o conjunto das *fdp*, entendendo-se com esta notação que $p(s_1, t_1) = p_1(s_1)$, $p(s_2, t_2) = p_2(s_2)$, etc. A média estatística ou valor médio de $s(t)$ é dada por

$$\overline{s(t)} = E\left[s(t)\right] \doteq \int_{-\infty}^{\infty} s \, p(s, t) \, ds \tag{4.1}$$

em que, na operação de esperança, E[], t é uma constante. A equação 4.1 representa uma *média de conjunto*, isto é, uma média sobre o conjunto das formas de onda mantendo o tempo constante. Portanto, o valor da média de conjunto $\overline{s(t)}$ pode ser uma função do tempo pelo facto das médias $\overline{s(t_1)}$, $\overline{s(t_2)}$, ...,$\overline{s(t_i)}$ poderem ser diferentes.

O mesmo se pode dizer para as restantes médias ou momentos de ordem superior. O n-ésimo momento de $s(t)$ será

$$\overline{s^n(t)} = E\left[s^n(t)\right] \doteq \int_{-\infty}^{\infty} s^n \, p(s, t) \, ds \tag{4.2}$$

Processos estacionários e ergódicos

Um processo aleatório *estacionário* é aquele cujas características permanecem invariantes no tempo, isto é, qualquer translação da origem dos tempos para todo o conjunto de sinais-amostra $\overline{\{s(t,a_i)\}}$ não afecta os valores das médias estatísticas. Neste caso tem-se $\overline{s^n(t_1)} = \overline{s^n(t_2)} = ... = \overline{s^n(t_i)}$ e portanto $\overline{s^n(t)}$ não depende do tempo. Designadamente tem-se,

$$E[s(t)] = \overline{s} = m_s \tag{4.3}$$
$$E\left[s^2(t)\right] = \overline{s^2} = m_s^2 + \sigma_s^2 \tag{4.4}$$

Em que m_s e σ_s^2 são, respectivamente, a média e a variância[2] do processo aleatório $s(t)$.

Se num processo aleatório *todas* as médias de conjunto forem iguais às correspondentes médias temporais, o processo é designado de *ergódico*, isto é, ter-se-á

$$\langle s_i(t)\rangle = E[s(t)] \tag{4.5}$$
$$\langle s_i^2(t)\rangle = E\left[s^2(t)\right] \tag{4.6}$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

em que $\langle s_i(t)\rangle$ e $\langle s_i^2(t)\rangle$ são as já conhecidas médias temporais

$$\langle s_i(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_i(t)\,dt \tag{4.7}$$
$$\langle s_i^2(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_i^2(t)\,dt = S \tag{4.8}$$

Se $0 < \overline{s^2} < \infty$, diz-se que o sinal aleatório é um sinal de potência com potência média $\overline{s^2}$. Assim, fica estabelecida uma relação entre as características da descrição aleatória e as da descrição temporal de um sinal, permitindo concluir que, se um sinal aleatório é estacionário e ergódico:

(i) O valor médio m_s é igual à amplitude da *componente contínua* $\langle s(t)\rangle$.

(ii) O quadrado da média m_s^2 é igual à potência normalizada da componente contínua (DC) $\langle s(t)\rangle^2$.

(iii) O valor quadrático médio $\overline{s^2}$ é igual à *potência média total normalizada* $\langle s^2(t)\rangle = S$.

(iv) A variância σ_s^2 é igual à *potência média normalizada das componentes variáveis no tempo* de $s(t)$, ou seja a potência AC.

[2] a variância, ou 2º momento central, é dada por $\sigma_s^2 = \overline{(s-m_s)^2} = \overline{s^2} - m_s^2$

(v) O desvio padrão σ_s é igual à *raiz do valor quadrático médio*, ou seja, ao *valor eficaz*[3] das componentes variáveis no tempo de $s(t)$.

Em conclusão, para efeitos da análise dos sinais de informação, a *função de densidade de probabilidade*, $p(s)$, de um sinal aleatório ergódico $s(t)$ substitui a sua descrição temporal. E, na realidade, verifica-se que os sinais de comunicação são razoavelmente bem modelados por processos estocásticos ergódicos.

4.2 Ruído

Os sinais eléctricos indesejáveis, genericamente designados de *ruído*, têm origens diversas podendo ser classificados como de *origem humana* ou de *origem natural*. O ruído de origem humana é causado, por exêmplo, pela influência de outros sistemas de comunicação, de dispositivos de ignição e comutação eléctrica, etc. Os fenómenos que produzem o ruído natural são por exêmplo as descargas atmosféricas, a radiação extra-terrestre e o ruído dos circuitos eléctricos. Um projecto bem concebido de um sistema de transmissão pode reduzir ou mesmo eliminar completamente os efeitos de certos tipos de ruído mas a presença de outros é mesmo inevitável o que impõe limitações fundamentais ao desempenho dos sistemas.

O ruído pode ser dividido em quatro categorias:

(i) Ruído térmico

(ii) Ruído de intermodulação

(iii) *Crosstalk*

(iv) Ruído impulsivo

O ruído térmico é devido à agitação térmica dos electrões nos condutores, um movimento aleatório de particulas carregadas. É portanto, e fundamentalmente, uma função da temperatura a que o sistema se encontra.

O ruído de intermodulação acontece quando sinais com diferentes componentes de frequência partilham o mesmo meio de transmissão e interferem

[3] *root mean square (rms)*, $\sigma_s = \sqrt{\overline{s^2}}$

entre si. O seu efeito é a produção de sinais com frequências que são a soma ou a diferença das frequências que compõem os sinais originais.

O *crosstalk* pode ocorrer pelo acoplamento eléctrico ou electromagnético entre pares de fios próximos ou, mais raramente entre cabos coaxiais. Trata-se de um acoplamento indesejável entre os *percursos geográficos* dos sinais. Um exêmplo típico é o da escuta de uma conversação telefónica estranha por *cruzamento de linhas*.

O ruído impulsivo é a designação da ocorrência irregular de *pulsos* ou *estalos* de curta duração e de relativamente grande amplitude (*spikes*). As suas causas são várias, como por exêmplo, as perturbações electromagnéticas externas, as descargas atmosféricas, e as falhas ocasionais do próprio sistema de transmissão.

As primeiras três categorias de ruído possuem características (aleatórias) relativamente bem previsíveis ao passo que o ruído impulsivo não tem características regulares, não é contínuo.

O ruído impulsivo perturba pouco as comunicações analógicas. Uma transmissão telefónica pode ser corrompida por curtos *pulsos* ou *estalos* sem perda de inteligibilidade. Contudo, nas transmissões digitais, este tipo de ruído é a principal fonte de erro. Um *pulso* de ruído de 10 ms de duração não afectaria uma transmissão de voz analógica mas corromperia cerca de 50 símbolos de dados que estivessem a ser transmitidos digitalmente a 4 800 baud.

4.2.1 O ruído térmico

A teoria cinética das partículas diz que a energia média de uma partícula à temperatura absoluta de $\mathcal{T}$ é proporcional a $k\mathcal{T}$ em que k é a constante de Boltzmann.

Quando uma resistência metálica de valor R Ω está a uma temperatura $\mathcal{T}$, o movimento aleatório dos electrões produz uma tensão aleatória de ruído $n(t)$ aos seus terminais. De acordo com o teorema do limite central[4], $n(t)$ possui uma *função de densidade de probabilidade gaussiana*, $p_N(n)$

[4] O *teorema do limite central* diz essêncialmente o seguinte: Se uma variável aleatória X resulta da soma de n componentes aleatórias independentes e se cada componente contribui muito pouco para a soma, então, a função de distribuição de probabilidade de X tende para uma distribuição *gaussiana* ou *normal* à medida que n aumenta, independentemente das distribuições de probabilidade das componentes individuais

de média nula e variância σ_n^2, sendo

$$p_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma_n^2}}\, e^{-(n-m_n)^2/2\,\sigma_n^2} \qquad (4.9)$$

$$m_n = \overline{n} = 0 \qquad (4.10)$$

$$\sigma_n^2 = \overline{n^2} = \frac{2\,(\pi k \mathcal{T})^2}{3h}\, R \qquad \text{Volt}^2 \qquad (4.11)$$

onde a temperatura $\mathcal{T}$ é medida em Kelvin e

k	=	constante de Boltzmann	=	1.38×10^{-23}	Joules/Kelvin
h	=	constante de Planck	=	6.60×10^{-34}	Joules·segundo

As constantes presentes na equação 4.11 revelam que se trata de um resultado da mecânica quântica a qual consegue mostrar ainda que a *densidade espectral de potência* do ruído térmico produzido pela resistência de $R\,\Omega$ é dada por

$$|N(f)|_R^2 \approx 2\,R\,k\,\mathcal{T}\left(1 - \frac{h\,|f|}{2\,k\,\mathcal{T}}\right) \quad \text{Volt}^2/\text{Hz} \quad \text{para} \quad |f| \ll \frac{k\mathcal{T}}{h} \qquad (4.12)$$

em que se utiliza o índice-R para indicar que se trata da densidade total do ruído produzido por uma resistência de valor $R\,\Omega$.

Se, por exêmplo, a resistência se encontra a uma temperatura ambiente de 21°C, a que corresponde $\mathcal{T}_0 = 294$ K, então $|N(f)|_R^2$ será essêncialmente constante para $|f| < 0.1\frac{k\mathcal{T}_0}{h} \approx 0.6 \times 10^{12}$ Hz. O limite superior desta banda de frequências situa-se na zona do infravermelho do espectro electromagnético, substancialmente acima das frequências utilizadas nas transmissões eléctricas pelo que, para todos os efeitos práticos, se pode dizer que a densidade espectral de potência do ruído térmico é constante e igual a

$$|N(f)|_R^2 = 2\,R\,k\,\mathcal{T} \quad \text{Volt}^2/\text{Hz} \qquad (4.13)$$

No entanto, nem toda a potência de ruído produzida pela resistência é transferida, sob a forma de sinal de ruído, para o sistema de transmissão, porque parte dela é dissipada na própria resistência. Só uma parte dessa potência se manifesta no sistema e essa parte é máxima quando a resistência está ligada a uma *carga*, R_L, de igual valor[5], $R_L = R$, resultado que

[5] é um resultado conhecido da teoria dos circuitos eléctricos que a máxima transferência de potência para uma carga se dá quando a impedância da carga é o complexo conjugado da impedância da fonte de potência. Neste caso, o complexo conjugado de um valor puramente resistivo é igual a ele próprio.

é aplicável à densidade de potência. A figura 4.2 mostra o circuito equivalente de Thévenin da resistência como fonte de ruído térmico, ligada a uma carga resistiva de valor $R_L = R$ que representa o sistema de transmissão influenciado pelo ruído produzido pela resistência. A tensão aos

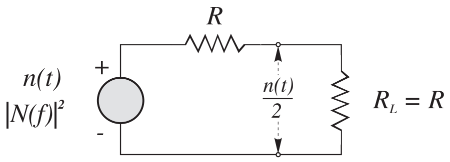


Figura 4.2: Circuito equivalente de Thévenin de uma fonte resistiva de ruído térmico e respectiva carga de máxima transferência de potência

terminais da carga, devido à divisão de tensão, é $\frac{n(t)}{2}$ e o seu valor eficaz é $V = \sqrt{\overline{(n(t)/2)^2}}$. A potência média transmitida à carga é pois V^2/R, ou seja, $\overline{n^2(t)}/4R$, em que $\overline{n^2(t)}$ é a potência média total produzida pela resistência. Assim, também, a densidade espectral de potência (máxima) do ruído térmico que se manifesta no sistema, será dada por

$$|N(f)|^2 \;=\; \frac{|N(f)|^2_R}{4R} \;=\; \frac{k\mathcal{T}}{2} \;\; \text{Watt/Hz} \qquad (4.14)$$

valor que depende apenas da temperatura (ver Prob 4.1).

4.2.2 Ruído branco e gaussiano

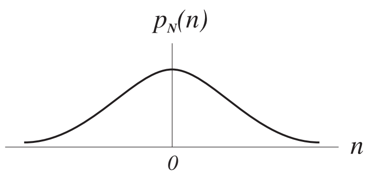
Para além do ruído térmico produzido pelos circuitos, de que a análise para uma resistência foi um exêmplo, muitas outras fontes de ruído se caracterizam por uma *função de densidade de probabilidade* gaussiana e uma *densidade espectral de potência* constante ao longo de quase todo o espectro electromagnético útil.

O espectro do ruído em geral é caracterizado por possuir todas as componentes de frequência em igual proporção e, por esta razão e por analogia com a luz branca, é chamado de *ruído branco*. Em comunicações eléctricas o ruído *branco* e *gaussiano* é, na grande maioria das situações, um modelo aceitável para o ruído total presente na transmissão do sinal e manifesta-se de forma *aditiva*, no sentido de se ir adicionando ao sinal em vários pontos ao longo do percurso entre a fonte e o destino, sobrepondo-se aditivamente, tanto em *em amplitude* como em *potência*, ao sinal de informação.

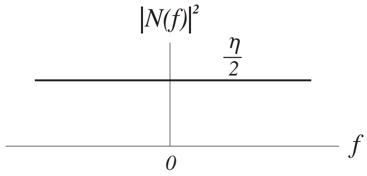
A combinação de todas as fontes de ruído deste tipo (e não só o de origem térmica) permite-nos escrever a sua densidade espectral sob a forma

$$|N(f)|^2 = \frac{\eta}{2} \quad \text{Watt/Hz} \tag{4.15}$$

em que o factor $1/2$ indica que metade da densidade de potência diz respeito ao sub-domínio negativo das frequências e a outra metade ao positivo e η quantifica não só a componente térmica ($k\mathcal{T}$) mas todo o ruído de origem natural. A figura 4.3 ilustra graficamente as duas funções características do ruído branco e gaussiano.



(a) densidade de probabilidade



(b) densidade espectral de potência

Figura 4.3: Características do ruido branco e gaussiano

4.2.3 Largura de banda equivalente de ruído

Uma densidade de potência de ruído constante daria uma potência de ruído infinita no receptor[6] pelo que seria impossível detectar o sinal com um tal valor do ruído sobreposto. Porém assim não acontece visto que o sistema de transmissão tem sempre uma largura de banda limitada, limitando assim a potência total do ruído, filtrando-o.

Se considerarmos um sistema sem sinal de entrada, apenas o ruído se manifesta à saida com uma potência média

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\infty}^{\infty} |N(f)|^2 \, |H(f)|^2 \, df \\ &= \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \, df \end{aligned}$$

[6] pois $\int_{-\infty}^{\infty} |N(f)|^2 df = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} df = \infty$

$$= \eta \int_0^\infty |H(f)|^2 \, df \tag{4.16}$$

em que o integral na equação 4.16 tem as dimensões de Hz, ou seja, de uma largura de banda, podendo-se escrever

$$N = \eta \, g \, B_N \tag{4.17}$$

com

$$B_N \doteq \frac{1}{g} \int_0^\infty |H(f)|^2 \, df \tag{4.18}$$

e em que $g = |H(f)|^2_{max}$ é o ganho máximo do sistema e B_N é a sua *largura de banda eqivalente de ruído* ou, simplesmente, *largura de banda de ruído.*

Exêmplo 4.1 *Considere-se o sistema de transmissão de 1ª ordem, com largura de banda a 3 dB igual a B_T, representado pela característica de potência*

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{B_T}\right)^2}$$

Tem-se para este caso $g = 1$ e

$$\begin{aligned}
B_N &= \int_0^\infty \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{B_T}\right)^2} \, df \\
&= B_T \int_0^\infty \frac{1/B_T}{1 + \left(\frac{f}{B_T}\right)^2} \, df \\
&= B_T \left[arctg \left(\frac{f}{B_T} \right) \right]_0^\infty \\
&= B_T \, \frac{\pi}{2} \\
B_N &\approx 1.57 \, B_T
\end{aligned} \tag{4.19}$$

A figura 4.4 dá uma interpretação geométrica a B_N. Neste caso verifica-se que a largura de banda de ruído (B_N) é cerca de 50% maior do que a largura de banda a 3 dB (B_T).

Como é, de facto, a relação entre as potências do ruído e do sinal presentes no receptor que vai determinar a eficácia da detecção do sinal, é usual adoptar-se para largura de banda de um sistema a seguinte

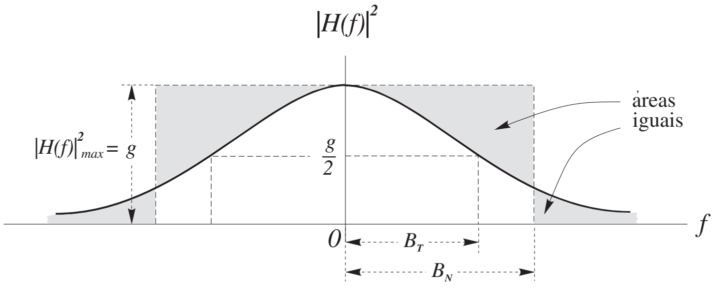


Figura 4.4: Largura de banda equivalente de ruído de um sistema PB

Definição 4.1 – **Largura de banda equivalente de ruído** *de um sistema, é a largura de banda do filtro ideal que deixa passar a mesma potência de ruído que esse sistema e tem o mesmo ganho máximo.*

Se o sistema do exêmplo 4.1 fosse mais selectivo[7], isto é, com uma transição de corte mais abrupta, a largura de banda de ruído aproximar-se-ia da largura de banda a 3 dB (ver Prob 4.2). Na maior parte dos casos da prática toma-se, sem grande erro, $B_N \approx B_T$. Em resumo, se o ruído num sistema de transmissão com largura de banda B_T, é branco e gaussiano, ele será *filtrado* pelo sistema e manisfestar-se-á no receptor com uma potência média

$$\boxed{N \;=\; \sigma_n^2 \;=\; \eta\, g\, B_T \quad \text{Watt}} \tag{4.20}$$

4.3 Erros

4.3.1 Regeneração do sinal digital

Suponhamos uma transmissão digital binária unipolar. Os símbolos transmitidos são pulsos rectangulares com T_s s de duração que podem tomar apenas dois valores, isto é, o símbolo k terá amplitude $a_k = 0$ ou $a_k = A$ consoante represente, respectivamente, o valor lógico 0 ou o valor lógico 1. Seja t_k o instante dentro do intervalo do símbolo k em que o receptor toma uma decisão sobre o valor desse símbolo. Esta decisão é tomada

[7] um sistema de ordem superior à 1ª possuindo, portanto, uma banda de transição mais estreita

com base no valor do sinal $y(t)$ à entrada do receptor no instante t_k

$$y(t_k) = a_k + n(t_k)$$

instante em que, para o efeito, é obtida uma *amostra* do sinal recebido cuja amplitude, $y(t_k)$, é *mantida*[8] constante durante um tempo igual à duração do símbolo, T_s. O valor de $y(t_k)$ será a soma da amplitude do sinal com a amplitude do ruído naquele instante, préviamente filtrada por um filtro passa-baixo de modo a limitar a potência total do ruído à entrada do receptor. O procedimento de decisão culmina com a comparação entre os sucessivos valores de $y(t_k)$ e uma *amplitude de limiar* fixa, V. A resposta do comparador será uma amplitude maior do que zero, indicando o valor lógico 1, ou zero, indicando o valor lógico 0, consoante $y(t_k) > V$ ou $y(t_k) < V$ respectivamente.

O comparador produz, assim, uma estimativa $\widetilde{x}(t)$ do sinal que foi transmitido, $x(t)$. Estes procedimentos são ilustrados nas figuras 4.5 e 4.6 que representam os sub-sistemas componentes do receptor e as respectivas formas de onda e constituem o que se designa por *regeneração* do sinal.

Na realidade o regenerador comporta-se como um conversor analógico-digital ao converter a forma de onda analógica ruidosa $y(t)$ num sinal digital sem ruído, $\widetilde{x}(t)$, ocasionalmente com erros.

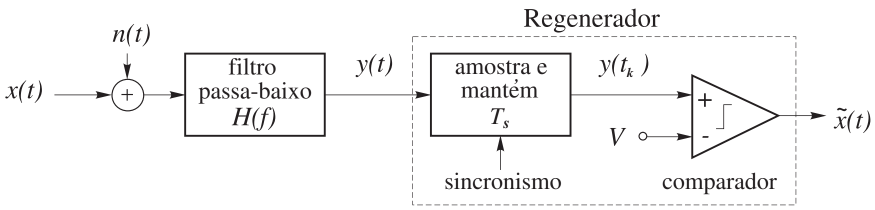


Figura 4.5: Receptor binário de banda de base

4.3.2 Probabilidade de erro

Existe erro na transmissão digital quando a estimativa não coincide com o valor transmitido, isto é, quando $\widetilde{x}(t_k) \neq x(t_k)$ o símbolo k está errado. Interessa conhecer a probabildade de isto acontecer pois será uma *medida*

[8] trata-se da função *amostra-e-mantém* (ou *sample-and-hold, S/H*)

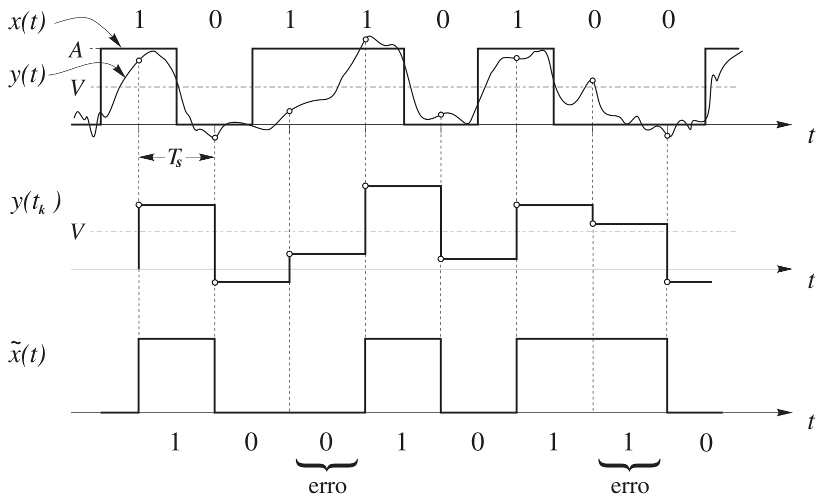


Figura 4.6: Regeneração de um sinal binário unipolar

importante da qualidade, ou desempenho, do sistema de transmissão digital. Prosseguindo na análise da transmissão unipolar, pode dizer-se, intuitivamente, que a amplitude de limiar, V, deve situar-se num valor intermédio $0 < V < A$. A regeneração dará origem a erro se, no instante da amostragem:

- o símbolo transmitido é o 0 ($a_k = 0$) e o ruído excede V ($n(t_k) > V$), ou
- o símbolo transmitido é o 1 ($a_k = A$) e a soma do ruído com A é inferior a V ($n(t_k) + A < V$)

o que se traduz na seguinte expressão para a probabilidade de erro onde $P(X)$ representa a probabilidade do evento X:

$$P_e = P(a_k = 0) \cdot P(n(t_k) > V) + P(a_k = A) \cdot P(n(t_k) + A < V) \quad (4.21)$$

Dado que o ruído é estacionário $P(n(t_k) = x_0) = P(n(t) = x_0) = P(n = x_0)\ \ \forall t, t_k$, isto é, a probabilidade do ruído ter um valor de amplitude igual a x_0 é independente do tempo, pelo que

$$P_e = P(a_k = 0) \cdot P(n > V) + P(a_k = A) \cdot P(n < V - A) \quad (4.22)$$

ou, escrita de uma forma mais condensada

$$P_e = P_0 \cdot P_{e0} + P_1 \cdot P_{e1} \tag{4.23}$$

Estamos a supôr que a ocorrência dos sucessivos valores dos símbolos transmitidos são estatísticamente independentes. Por outro lado espera-se que a ocorrência de 0s e 1s numa mensagem longa seja equiprovável, hipótese que é razoável admitir[9], ou seja, $P(a_k = 0) = P(a_k = A) = \frac{1}{2}$, donde

$$P_e = \frac{1}{2}\,[P(n > V) + P(n < V - A)] \tag{4.24}$$

em que

$$\begin{aligned} P_{e0} &= P(n > V) \;=\; \int_V^{\infty} p_N(n)\,dn \;=\; Q\left(\frac{V}{\sigma_n}\right) && (4.25)\\ P_{e1} &= P(n < V - A) \;=\; \int_{-\infty}^{V-A} p_N(n)\,dn \\ &= \int_{-\infty}^{V} p_N(n - A)\,dn \;=\; Q\left(\frac{A - V}{\sigma_n}\right) && (4.26) \end{aligned}$$

e $Q(k)$ é a probabilidade da cauda gaussiana[10]. O ábaco da tabela 4.2, no fim deste capítulo, permite determinar alguns valores para $Q(k)$. A probabilidade de erro pode ser escrita sob a forma

$$P_e = \frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{V}{\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{A - V}{\sigma_n}\right)\right] \tag{4.27}$$

Se os símbolos são originalmente equiprováveis e se o ruído, em média, afecta igualmente os símbolos transmitidos independentemente da amplitude destes, então não há razão para que o regenerador altere esta regra produzindo uma sequência $\widetilde{x}(t)$ em que os símbolos não sejam equiprováveis. Isto significa que o valor óptimo da amplitude de limiar, V_{opt}, que é também o valor que minimiza P_e, se deve situar no ponto onde as duas *funções de densidade de probabilidade* se intersectam — o ponto médio do intervalo $[0, A]$ — ao qual correspondem áreas de cauda iguais e portanto probabilidades de erro iguais. Assim sendo, $V_{opt} = A/2$.

[9] como se justificará mais adiante na Teoria da Informação

[10] $Q(k)$ é a probabilidade de uma variável aleatória gaussiana de média m e variância σ^2 tomar um valor maior do que $m + k\sigma$, ié,

$$Q(k) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$$

também chamada *área sob a cauda gaussiana*

A figura 4.7 ilustra esta discussão mostrando uma situação em que $V < V_{opt} = A/2$. Neste caso, a área sombreada mais escura é menor do que a área sombreada mais clara, significando que a probabilidade de erro quando $a_k = A$ será menor do que a probabilidade de erro quando $a_k = 0$, decidindo o regenerador mais favoravelmente pelo valor 1 do que pelo valor 0, em média. Com $V = V_{opt} = A/2$ tem-se $Q\left(\frac{V}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{A-V}{\sigma_n}\right) =$

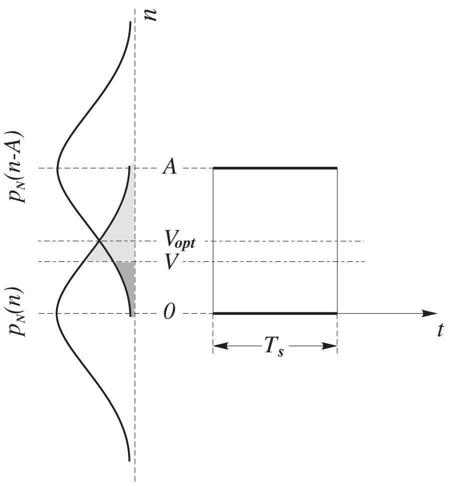


Figura 4.7: *Fdps*, amplitude de limiar de decisão e probabilidades de erro

$Q\left(\frac{A}{2\,\sigma_n}\right)$ pelo que da equação 4.27 resulta finalmente a probabilidade de erro para a transmissão binária unipolar

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\,\sigma_n}\right) \tag{4.28}$$

No caso geral em que os símbolos gerados pelo emissor não são equiprováveis, o valor óptimo da amplitude de limiar, que minimiza P_e, é a solução da equação $\frac{dP_e}{dV} = 0$ com P_e definido pela equação 4.22. A resolução desta equação que envolve a diferenciação dos integrais 4.25 e 4.26, conduz à seguinte relação

$$P_0 \cdot P(n > V_{opt}) \;=\; P_1 \cdot P(n < V_{opt} - A) \tag{4.29}$$

Os valores σ_n e A podem expressar-se em função das potências médias do ruído e do sinal respectivamente, dado que $N = \sigma_n^2$ e, para o sinal unipolar, $S = A^2/2$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{1}{2}\frac{S}{N}}\right) \tag{4.30}$$

Por outro lado o filtro passa-baixo à entrada do regenerador não pode ter largura de banda inferior a metade do ritmo de símbolos, isto é, $B_T \approx B_N \geq r_s/2$ pelo que a potência do ruído é sempre

$$N \;=\; \eta\, B_T \;\geq\; \eta\, \frac{r_s}{2} \tag{4.31}$$

podendo-se obter o seguinte limite inferior para a probabilidade de erro

$$P_e \geq Q\left(\sqrt{\frac{S}{\eta\, r_s}}\right) \tag{4.32}$$

donde se conclui que, para a mesma potência média do sinal e densidade de ruído, a probabilidade de erro aumenta quando o ritmo de símbolos aumenta (e vice-versa).

É usual, ainda, representar P_e em função da *energia média por símbolo*, E_s. Para tal basta notar que $E_s = S \cdot T_s = S/r_s$ Joules e vem

$$P_e \geq Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right) \tag{4.33}$$

A quantidade

$$\gamma_s = \frac{E_s}{\eta} \tag{4.34}$$

é um parâmetro importante na medida de desempenho de sistemas de transmissão digitais e é comparável ao parâmetro *razão sinal-ruído*, $\frac{S}{N}$ que é mais utilizado para a medida de desempenho de sistemas de transmissão analógicos.

Os casos de outros códigos de linha podem ser tratados de forma semelhante. Na codificação binária *polar*, por exêmplo, os símbolos terão amplitudes $a_k = \pm A/2$. A amplitude de limiar mantém o seu valor relativo a estas amplitudes, isto é, $V_{opt} = 0$ e a potência média do sinal será $S = A^2/4$.

A tabela 4.1 resume as várias formas de expressar a probabilidade de erro para os sinais unipolares e polares.

Tabela 4.1: Probabilidades de erro

P_e	
Unipolar	Polar
$Q\left(\frac{A}{2\,\sigma_n}\right)$	$Q\left(\frac{A}{2\,\sigma_n}\right)$
$Q\left(\sqrt{\frac{1}{2}\frac{S}{N}}\right)$	$Q\left(\sqrt{\frac{S}{N}}\right)$
$\geq\ Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right)$	$\geq\ Q\left(\sqrt{\frac{2\,E_s}{\eta}}\right)$
$\geq\ Q\left(\sqrt{\gamma_s}\right)$	$\geq\ Q\left(\sqrt{2\,\gamma_s}\right)$

Exêmplo 4.2 *Um computador transmite por uma porta de comunicações, pulsos unipolares ao ritmo de 10^6 bps $= 1$ Mbps para transmissão por um sistema com ruído de densidade espectral de potência 4×10^{-20} W/Hz. Pretende-se determinar o valor para a potência média do sinal de modo a que a taxa de erros não exceda um bit por hora.*

Tem-se portanto $r_s = 10^6$ e $\eta = 4 \times 10^{-20}$. A taxa de erros máxima define o valor máximo da probabilidade de erro que é

$$
\begin{aligned}
P_e &= \frac{n^{\underline{o}} \text{ de dígitos errados em 1 hora}}{n^{\underline{o}} \text{ total de dígitos transmitidos em 1 hora}} \\
&\leq \frac{1}{3600 \times r_s} = \frac{1}{3600 \times 10^6} \approx 2.8 \times 10^{-10}
\end{aligned}
$$

consultando o ábaco de $Q(k)$ verifica-se que $Q(6.2) \approx 2.8 \times 10^{-10}$ e, como o sinal é unipolar, $\sqrt{S/\eta r_s} = 6.2$, donde resulta

$$
\begin{aligned}
S &\geq 6.2^2 \times \eta\, r_s = 6.2^2 \times 4 \times 10^{-20} \times 10^6 \approx 1.5 \times 10^{-12} = 1.5\ pW \\
S_{dBm} &\geq -88\ dBm
\end{aligned}
$$

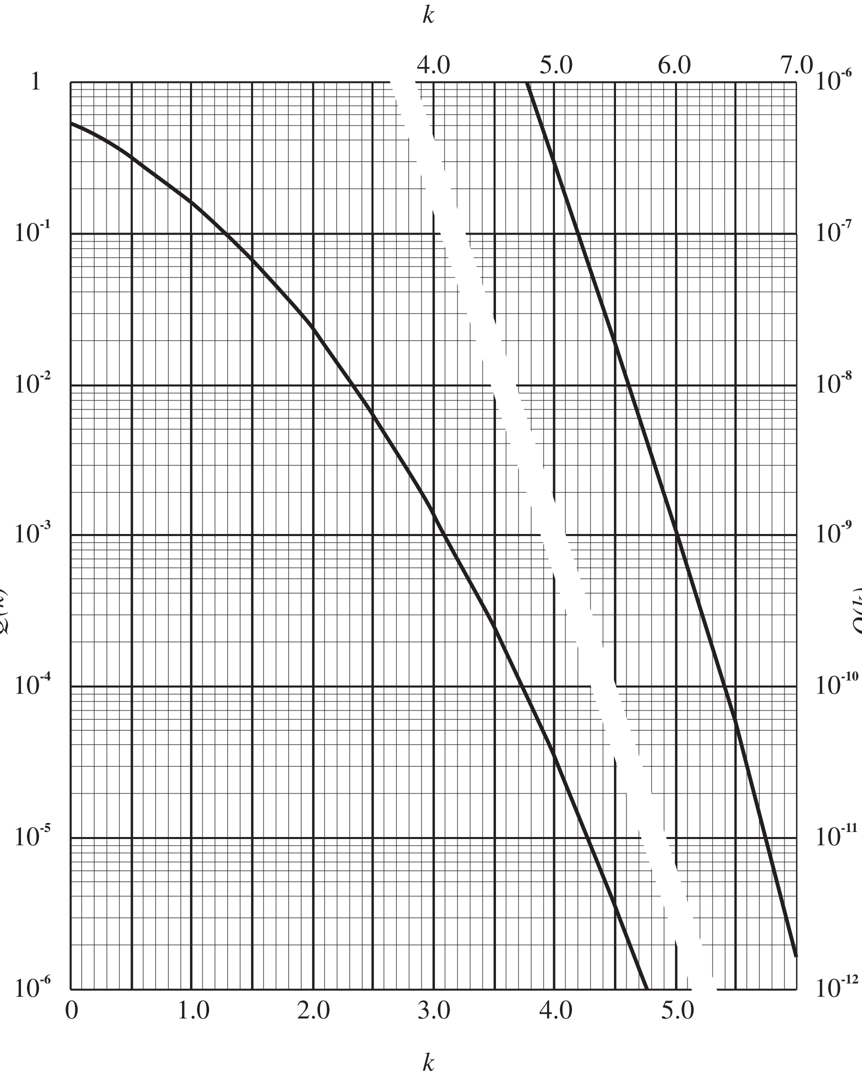
Trata-se de um valor bastante pequeno. No entanto representa a potência mínima do sinal que deve chegar ao receptor. Se se pretendesse determinar a potência mínima do sinal no transmissor dever-se-ia adicionar a este valor a atenuação introduzida pelo sistema de transmissão.

Tabela 4.2: Probabilidades da Cauda Gaussiana

A probabilidade de uma variável aleatória gaussiana de média m e variância σ^2 tomar um valor maior do que $m + k\sigma$ é dada por

$$Q(k) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty e^{-x^2/2}\, dx$$

$$P(X > m + k\sigma) = P(X \leq m - k\sigma) = Q(k)$$



4.4 Problemas

4.1 – A partir da equação 4.11 calcule o valor eficaz (raiz do valor quadrático médio) do ruído térmico aos terminais de uma resistência de 1 Ω à temperatura de 29 Kelvin. Utilize a equação 4.12 para determinar qual a percentagem desse valor que é devida às componentes de frequência do ruído na banda $|f| < 1$ GHz.

4.2 – Considere o sistema de Butterworth de ordem-n definido por

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f}{B_T}\right)^{2n}}}$$

Mostre que a largura de banda equivalente de ruído está relacionada com a largura de banda a 3 dB por

$$B_N = \frac{\pi\, B_T}{2n\, \sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$$

e que portanto $B_N \to B_T$ quando $n \to \infty$.

Sugestão: Notar que $\displaystyle\int_0^{-\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\, dx = \frac{\pi\, n}{\sin\left(\dfrac{m\,\pi}{n}\right)}$ para $n > m > 0$.

4.3 – Considere um sistema de transmissão para sinais binários unipolares com símbolos equiprováveis e $S/N = 50$ no receptor. Calcule as probabilidades de erro para cada um dos dois símbolos P_{e0} e P_{e1} e a probabilidade total de erro P_e quando a amplitude de limiar tem um valor não-óptimo $V = 0.4\, A$. Compare o valor de P_e com o valor mínimo dado pela equação 4.28.

4.4 – Determine a razão S/N no receptor de um sistema binário unipolar com ruído branco e gaussiano de modo a que $P_e = 0.001$. Qual seria a probabilidade de erro de um sistema polar com a mesma S/N?

4.5 – Um sistema de transmissão binário é afectado de ruído branco e gaussiano com densidade $\eta = 10^{-14}$ Watt/Hz. Sabendo que o ritmo de transmissão é de 1 Mbps determine qual deve ser a potência média do sinal no receptor, para sinalização tanto polar como unipolar, por forma a que a probabilidade de erro não exceda um bit em um milhão.

fim do capítulo 4