

## Capítulo 4

# Ruído e Erros

Todos os sinais de comunicação úteis, sob o ponto de vista do destinatário da informação, são aleatórios ou imprevisíveis. De facto, a *comunicação* não teria nenhum interesse se o destinatário tivesse conhecimento antecipado do comportamento exacto do sinal que irá receber dado que, se tal acontecesse, a *informação* recebida seria nula (como se justificará mais adiante) e não seria necessária a transmissão! Aquilo que o receptor conhece são as características gerais dos sinais utilizados na comunicação, como por exemplo a sua largura de banda, a densidade espectral de potência, o código e a técnica de modulação utilizados para os símbolos da fonte, etc.

Assim, na impossibilidade de se lidar com descrições matemáticas determinísticas dos sinais de informação há que recorrer a descrições probabilísticas, em que os sinais são modelados por *processos aleatórios*.

Por outro lado, em qualquer sistema de transmissão, para além dos sinais de informação originados pela fonte, estão presentes outros sinais indesejáveis, genericamente designados por *ruído*, os quais não é possível eliminar totalmente.

O *ruído* é intrinsecamente aleatório dada a natureza dos fenómenos que o originam pelo que também devem ser descritos como *processos aleatórios*.

Mais propriamente, os sinais aleatórios são a manifestação de *processos aleatórios* ou *estocásticos* que têm lugar ao longo do tempo.

Este capítulo aborda os fundamentos da descrição de sinais por processos aleatórios e em especial a descrição do *ruído*, as suas características mais importantes e a forma como este afecta as comunicações.

## 4.1 Sinais aleatórios

A figura 4.1 mostra algumas das formas de onda,  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ , ...,  $s_i(t)$ , correspondentes à emissão de diferentes mensagens por uma fonte de informação. A mensagem concreta que é emitida em cada instância é pois desconhecida à priori, sendo portanto imprevisível a forma de onda (sinal) que irá ser produzida. O conjunto de todas as formas de onda

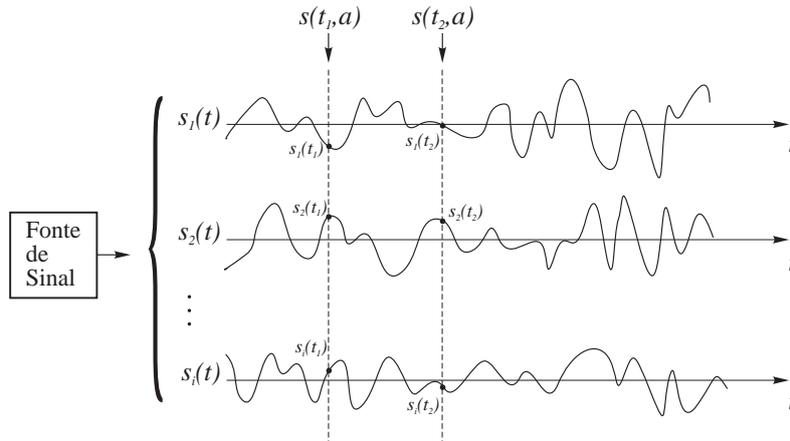


Figura 4.1: Formas de onda num conjunto  $s(t, a)$

capazes de serem geradas pela fonte pode então ser representado formalmente pela função  $s(t, a)$ , em que cada elemento do conjunto, designado *função amostra*, corresponde a um determinado sinal, por exemplo,  $s_i(t) = s(t, a_i)$ .

O argumento fulcral que faz da função  $s(t, a)$  um processo aleatório é a assumpção de que, quando se está a observar uma *função amostra*, não se sabe de qual das amostras  $a_i$  se trata. Portanto, num instante  $t_1$  pode ocorrer *qualquer* valor do conjunto dos possíveis valores  $s(t_1, a)$ , o que significa que  $s(t_1, a)$  constitui uma *variável aleatória*<sup>1</sup> que toma valores definidos por  $s(t, a_1)$ ,  $s(t, a_2)$ , ...,  $s(t, a_i)$  no instante  $t = t_1$ .

Do mesmo modo,  $s(t_2, a)$  constitui outra *variável aleatória* que toma va-

<sup>1</sup>apesar desta designação, uma *variável aleatória* não é nem variável nem aleatória! É uma *função* que toma valores numéricos bem definidos em consequência da ocorrência de resultados de uma experiência que consiste na escolha, ao acaso, dos possíveis resultados dessa experiência

lores definidos por  $s(t, a_1), s(t, a_2), \dots, s(t, a_i)$  no instante  $t = t_2$ , isto é, no conjunto  $\{s(t_2, a_1), s(t_2, a_2), \dots, s(t_2, a_i)\}$ .

Assim, um processo aleatório  $s(t, a)$  que passamos a designar por  $s(t)$ , omitindo a referência a  $a$ , não é mais do que uma família de variáveis aleatórias  $s(t_1), s(t_2), \dots, s(t_i)$ , cujas funções de probabilidade descrevem o processo aleatório nos respectivos instantes de tempo.

Se, por exemplo, a *função de densidade de probabilidade (fdp)* de  $s(t_1)$  for  $p_1(s_1)$ , em que a variável auxiliar  $s_1$  não deve ser confundida com a função amostra  $s_1(t) = s(t, a_1)$ , a probabilidade do evento  $s(t_1) \leq A$  pode ser obtida integrando  $p_1(s_1)$  em  $]-\infty, A]$  e o 1<sup>o</sup> momento, ou valor médio,  $\overline{s(t_1)}$  pode ser obtido através da fórmula usual da esperança matemática de uma variável aleatória (eq 4.1).

Da mesma maneira, conhecida a *fdp* de  $s(t_2), p_2(s_2)$ , se poderia calcular a probabilidade  $P[s(t_2) \leq A]$  e a média  $\overline{s(t_2)}$ , cujos valores seriam, em geral, diferentes dos obtidos para  $s(t_1)$ .

### Médias de conjunto

Designemos por  $p(s, t)$  o conjunto das *fdp*, entendendo-se com esta notação que  $p(s_1, t_1) = p_1(s_1), p(s_2, t_2) = p_2(s_2)$ , etc. A média estatística ou valor médio de  $s(t)$  é dada por

$$\overline{s(t)} = E[s(t)] \doteq \int_{-\infty}^{\infty} s p(s, t) ds \quad (4.1)$$

em que, na operação de esperança,  $E[\ ]$ ,  $t$  é uma constante. A equação 4.1 representa uma *média de conjunto*, isto é, uma média sobre o conjunto das formas de onda mantendo o tempo constante. Portanto, o valor da média de conjunto  $\overline{s(t)}$  pode ser uma função do tempo pelo facto das médias  $\overline{s(t_1)}, \overline{s(t_2)}, \dots, \overline{s(t_i)}$  poderem ser diferentes.

O mesmo se pode dizer para as restantes médias ou momentos de ordem superior. O  $n$ -ésimo momento de  $s(t)$  será

$$\overline{s^n(t)} = E[s^n(t)] \doteq \int_{-\infty}^{\infty} s^n p(s, t) ds \quad (4.2)$$

### Processos estacionários e ergódicos

Um processo aleatório *estacionário* é aquele cujas características permanecem invariantes no tempo, isto é, qualquer translação da origem dos tem-

pos para todo o conjunto de sinais-amostra  $\{s(t, a_i)\}$  não afecta os valores das médias estatísticas. Neste caso tem-se  $\overline{s^n(t_1)} = \overline{s^n(t_2)} = \dots = \overline{s^n(t_i)}$  e portanto  $\overline{s^n(t)}$  não depende do tempo. Designadamente tem-se,

$$E[s(t)] = \bar{s} = m_s \quad (4.3)$$

$$E[s^2(t)] = \overline{s^2} = m_s^2 + \sigma_s^2 \quad (4.4)$$

Em que  $m_s$  e  $\sigma_s^2$  são, respectivamente, a média e a variância<sup>2</sup> do processo aleatório  $s(t)$ .

Se num processo aleatório *todas* as médias de conjunto forem iguais às correspondentes médias temporais, o processo é designado de *ergódico*, isto é, ter-se-á

$$\langle s_i(t) \rangle = E[s(t)] \quad (4.5)$$

$$\langle s_i^2(t) \rangle = E[s^2(t)] \quad (4.6)$$

...

em que  $\langle s_i(t) \rangle$  e  $\langle s_i^2(t) \rangle$  são as já conhecidas médias temporais

$$\langle s_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_i(t) dt \quad (4.7)$$

$$\langle s_i^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_i^2(t) dt = S \quad (4.8)$$

Se  $0 < \overline{s^2} < \infty$ , diz-se que o sinal aleatório é um sinal de potência com potência média  $\overline{s^2}$ . Assim, fica estabelecida uma relação entre as características da descrição aleatória e as da descrição temporal de um sinal, permitindo concluir que, se um sinal aleatório é estacionário e ergódico:

- (i) O valor médio  $m_s$  é igual à amplitude da *componente contínua*  $\langle s(t) \rangle$ .
- (ii) O quadrado da média  $m_s^2$  é igual à potência normalizada da componente contínua (DC)  $\langle s(t) \rangle^2$ .
- (iii) O valor quadrático médio  $\overline{s^2}$  é igual à *potência média total normalizada*  $\langle s^2(t) \rangle = S$ .
- (iv) A variância  $\sigma_s^2$  é igual à *potência média normalizada das componentes variáveis no tempo* de  $s(t)$ , ou seja a potência AC.

<sup>2</sup>a variância, ou 2<sup>o</sup> momento central, é dada por  $\sigma_s^2 = \overline{(s - m_s)^2} = \overline{s^2} - m_s^2$

- (v) O desvio padrão  $\sigma_s$  é igual à *raiz do valor quadrático médio*, ou seja, ao *valor eficaz*<sup>3</sup> das componentes variáveis no tempo de  $s(t)$ .

Em conclusão, para efeitos da análise dos sinais de informação, a *função de densidade de probabilidade*,  $p(s)$ , de um sinal aleatório ergódico  $s(t)$  substitui a sua descrição temporal. E, na realidade, verifica-se que os sinais de comunicação são razoavelmente bem modelados por processos estocásticos ergódicos.

## 4.2 Ruído

Os sinais eléctricos indesejáveis, genericamente designados de *ruído*, têm origens diversas podendo ser classificados como de *origem humana* ou de *origem natural*. O ruído de origem humana é causado, por exemplo, pela influência de outros sistemas de comunicação, de dispositivos de ignição e comutação eléctrica, etc. Os fenómenos que produzem o ruído natural são por exemplo as descargas atmosféricas, a radiação extra-terrestre e o ruído dos circuitos eléctricos. Um projecto bem concebido de um sistema de transmissão pode reduzir ou mesmo eliminar completamente os efeitos de certos tipos de ruído mas a presença de outros é mesmo inevitável o que impõe limitações fundamentais ao desempenho dos sistemas.

O ruído pode ser dividido em quatro categorias:

- (i) Ruído térmico
- (ii) Ruído de intermodulação
- (iii) *Crosstalk*
- (iv) Ruído impulsivo

O ruído térmico é devido à agitação térmica dos electrões nos condutores, um movimento aleatório de partículas carregadas. É portanto, e fundamentalmente, uma função da temperatura a que o sistema se encontra.

O ruído de intermodulação acontece quando sinais com diferentes componentes de frequência partilham o mesmo meio de transmissão e interferem

---

<sup>3</sup>*root mean square (rms)*,  $\sigma_s = \sqrt{s^2}$

entre si. O seu efeito é a produção de sinais com frequências que são a soma ou a diferença das frequências que compõem os sinais originais.

O *crosstalk* pode ocorrer pelo acoplamento eléctrico ou electromagnético entre pares de fios próximos ou, mais raramente entre cabos coaxiais. Trata-se de um acoplamento indesejável entre os *percursos geográficos* dos sinais. Um exemplo típico é o da escuta de uma conversação telefónica estranha por *cruzamento de linhas*.

O ruído impulsivo é a designação da ocorrência irregular de *pulsos* ou *estalos* de curta duração e de relativamente grande amplitude (*spikes*). As suas causas são várias, como por exemplo, as perturbações electromagnéticas externas, as descargas atmosféricas, e as falhas ocasionais do próprio sistema de transmissão.

As primeiras três categorias de ruído possuem características (aleatórias) relativamente bem previsíveis ao passo que o ruído impulsivo não tem características regulares, não é contínuo.

O ruído impulsivo perturba pouco as comunicações analógicas. Uma transmissão telefónica pode ser corrompida por curtos *pulsos* ou *estalos* sem perda de inteligibilidade. Contudo, nas transmissões digitais, este tipo de ruído é a principal fonte de erro. Um *pulso* de ruído de 10 ms de duração não afectaria uma transmissão de voz analógica mas corromperia cerca de 50 símbolos de dados que estivessem a ser transmitidos digitalmente a 4 800 baud.

### 4.2.1 O ruído térmico

A teoria cinética das partículas diz que a energia média de uma partícula à temperatura absoluta de  $\mathcal{T}$  é proporcional a  $k\mathcal{T}$  em que  $k$  é a constante de Boltzmann.

Quando uma resistência metálica de valor  $R \Omega$  está a uma temperatura  $\mathcal{T}$ , o movimento aleatório dos electrões produz uma tensão aleatória de ruído  $n(t)$  aos seus terminais. De acordo com o teorema do limite central<sup>4</sup>,  $n(t)$  possui uma *função de densidade de probabilidade gaussiana*,  $p_N(n)$

---

<sup>4</sup>O *teorema do limite central* diz essencialmente o seguinte: Se uma variável aleatória  $X$  resulta da soma de  $n$  componentes aleatórias independentes e se cada componente contribui muito pouco para a soma, então, a função de distribuição de probabilidade de  $X$  tende para uma distribuição *gaussiana* ou *normal* à medida que  $n$  aumenta, independentemente das distribuições de probabilidade das componentes individuais

de média nula e variância  $\sigma_n^2$ , sendo

$$p_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n^2} e^{-(n-m_n)^2/2\sigma_n^2} \quad (4.9)$$

$$m_n = \bar{n} = 0 \quad (4.10)$$

$$\sigma_n^2 = \frac{2(\pi k\mathcal{T})^2}{3h} R \quad \text{Volt}^2 \quad (4.11)$$

onde a temperatura  $\mathcal{T}$  é medida em Kelvin e

$$\begin{aligned} k &= \text{constante de Boltzmann} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ Joules/Kelvin} \\ h &= \text{constante de Planck} = 6.60 \times 10^{-34} \text{ Joules-segundo} \end{aligned}$$

As constantes presentes na equação 4.11 revelam que se trata de um resultado da mecânica quântica a qual consegue mostrar ainda que a *densidade espectral de potência* do ruído térmico produzido pela resistência de  $R \Omega$  é dada por

$$|N(f)|_R^2 \approx 2 R k \mathcal{T} \left(1 - \frac{h|f|}{2k\mathcal{T}}\right) \text{ Volt}^2/\text{Hz} \quad \text{para } |f| \ll \frac{k\mathcal{T}}{h} \quad (4.12)$$

em que se utiliza o índice- $R$  para indicar que se trata da densidade total do ruído produzido por uma resistência de valor  $R \Omega$ .

Se, por exemplo, a resistência se encontra a uma temperatura ambiente de  $21^\circ\text{C}$ , a que corresponde  $\mathcal{T}_0 = 294 \text{ K}$ , então  $|N(f)|_R^2$  será essencialmente constante para  $|f| < 0.1 \frac{k\mathcal{T}_0}{h} \approx 0.6 \times 10^{12} \text{ Hz}$ . O limite superior desta banda de frequências situa-se na zona do infravermelho do espectro electromagnético, substancialmente acima das frequências utilizadas nas transmissões eléctricas pelo que, para todos os efeitos práticos, se pode dizer que a densidade espectral de potência do ruído térmico é constante e igual a

$$|N(f)|_R^2 = 2 R k \mathcal{T} \text{ Volt}^2/\text{Hz} \quad (4.13)$$

No entanto, nem toda a potência de ruído produzida pela resistência é transferida, sob a forma de sinal de ruído, para o sistema de transmissão, porque parte dela é dissipada na própria resistência. Só uma parte dessa potência se manifesta no sistema e essa parte é máxima quando a resistência está ligada a uma carga,  $R_L$ , de igual valor<sup>5</sup>,  $R_L = R$ , resultado que

<sup>5</sup>é um resultado conhecido da teoria dos circuitos eléctricos que a máxima transferência de potência para uma carga se dá quando a impedância da carga é o complexo conjugado da impedância da fonte de potência. Neste caso, o complexo conjugado de um valor puramente resistivo é igual a ele próprio.

é aplicável à densidade de potência. A figura 4.2 mostra o circuito equivalente de Thévenin da resistência como fonte de ruído térmico, ligada a uma carga resistiva de valor  $R_L = R$  que representa o sistema de transmissão influenciado pelo ruído produzido pela resistência. A tensão aos

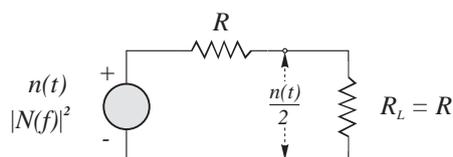


Figura 4.2: Circuito equivalente de Thévenin de uma fonte resistiva de ruído térmico e respectiva carga de máxima transferência de potência

terminais da carga, devido à divisão de tensão, é  $\frac{n(t)}{2}$  e o seu valor eficaz é  $V = \sqrt{\overline{(n(t)/2)^2}}$ . A potência média transmitida à carga é pois  $V^2/R$ , ou seja,  $\overline{n^2(t)}/4R$ , em que  $\overline{n^2(t)}$  é a potência média total produzida pela resistência. Assim, também, a densidade espectral de potência (máxima) do ruído térmico que se manifesta no sistema, será dada por

$$|N(f)|^2 = \frac{|N(f)|_R^2}{4R} = \frac{k\mathcal{T}}{2} \text{ Watt/Hz} \quad (4.14)$$

valor que depende apenas da temperatura (ver Prob 4.1).

#### 4.2.2 Ruído branco e gaussiano

Para além do ruído térmico produzido pelos circuitos, de que a análise para uma resistência foi um exemplo, muitas outras fontes de ruído se caracterizam por uma *função de densidade de probabilidade gaussiana* e uma *densidade espectral de potência constante* ao longo de quase todo o espectro electromagnético útil.

O espectro do ruído em geral é caracterizado por possuir todas as componentes de frequência em igual proporção e, por esta razão e por analogia com a luz branca, é chamado de *ruído branco*. Em comunicações eléctricas o ruído *branco* e *gaussiano* é, na grande maioria das situações, um modelo aceitável para o ruído total presente na transmissão do sinal e manifesta-se de forma *aditiva*, no sentido de se ir adicionando ao sinal em

vários pontos ao longo do percurso entre a fonte e o destino, sobrepondo-se aditivamente, tanto em *amplitude* como em *potência*, ao sinal de informação.

A combinação de todas as fontes de ruído deste tipo (e não só o de origem térmica) permite-nos escrever a sua densidade espectral sob a forma

$$|N(f)|^2 = \frac{\eta}{2} \text{ Watt/Hz} \quad (4.15)$$

em que o factor  $1/2$  indica que metade da densidade de potência diz respeito ao sub-domínio negativo das frequências e a outra metade ao positivo e  $\eta$  quantifica não só a componente térmica ( $kT$ ) mas todo o ruído de origem natural. A figura 4.3 ilustra graficamente as duas funções características do ruído branco e gaussiano.

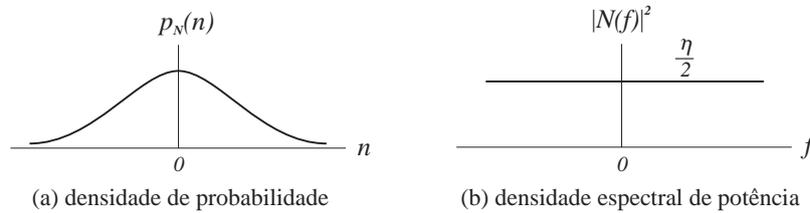


Figura 4.3: Características do ruído branco e gaussiano

### 4.2.3 Largura de banda equivalente de ruído

Uma densidade de potência de ruído constante daria uma potência de ruído infinita no receptor<sup>6</sup> pelo que seria impossível detectar o sinal com um tal valor do ruído sobreposto. Porém assim não acontece visto que o sistema de transmissão tem sempre uma largura de banda limitada, limitando assim a potência total do ruído, filtrando-o.

Se considerarmos um sistema sem sinal de entrada, apenas o ruído se manifesta à saída com uma potência média

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\infty}^{\infty} |N(f)|^2 |H(f)|^2 df \\ &= \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \end{aligned}$$

<sup>6</sup> pois  $\int_{-\infty}^{\infty} |N(f)|^2 df = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} df = \infty$

$$= \eta \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (4.16)$$

em que o integral na equação 4.16 tem as dimensões de Hz, ou seja, de uma largura de banda, podendo-se escrever

$$N = \eta g B_N \quad (4.17)$$

com

$$B_N \doteq \frac{1}{g} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (4.18)$$

e em que  $g = |H(f)|_{\max}^2$  é o ganho máximo do sistema e  $B_N$  é a sua largura de banda equivalente de ruído ou, simplesmente, largura de banda de ruído.

**Exemplo 4.1** Considere-se o sistema de transmissão de 1ª ordem, com largura de banda a 3 dB igual a  $B_T$ , representado pela característica de potência

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{B_T}\right)^2}$$

Tem-se para este caso  $g = 1$  e

$$\begin{aligned} B_N &= \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{B_T}\right)^2} df \\ &= B_T \int_0^{\infty} \frac{1/B_T}{1 + \left(\frac{f}{B_T}\right)^2} df \\ &= B_T \left[ \arctg \left( \frac{f}{B_T} \right) \right]_0^{\infty} \\ &= B_T \frac{\pi}{2} \\ B_N &\approx 1.57 B_T \end{aligned} \quad (4.19)$$

A figura 4.4 dá uma interpretação geométrica a  $B_N$ . Neste caso verifica-se que a largura de banda de ruído ( $B_N$ ) é cerca de 50% maior do que a largura de banda a 3 dB ( $B_T$ ).

Como é, de facto, a relação entre as potências do ruído e do sinal presentes no receptor que vai determinar a eficácia da detecção do sinal, é usual adoptar-se para largura de banda de um sistema a seguinte

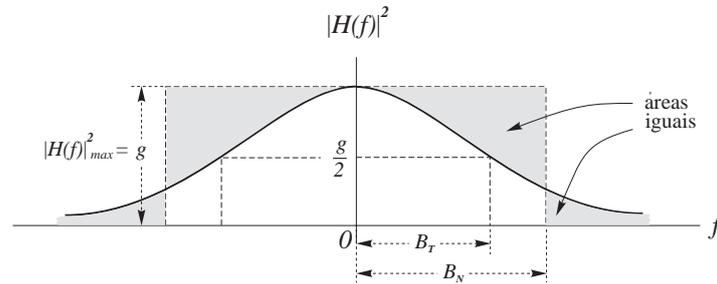


Figura 4.4: Largura de banda equivalente de ruído de um sistema PB

**Definição 4.1 – Largura de banda equivalente de ruído**

de um sistema, é a largura de banda do filtro ideal que deixa passar a mesma potência de ruído que esse sistema e tem o mesmo ganho máximo.

Se o sistema do exemplo 4.1 fosse mais selectivo<sup>7</sup>, isto é, com uma transição de corte mais abrupta, a largura de banda de ruído aproximar-se-ia da largura de banda a 3 dB (ver Prob 4.2). Na maior parte dos casos da prática toma-se, sem grande erro,  $B_N \approx B_T$ . Em resumo, se o ruído num sistema de transmissão com largura de banda  $B_T$ , é branco e gaussiano, ele será *filtrado* pelo sistema e manifestar-se-á no receptor com uma potência média

$$N = \sigma_n^2 = \eta g B_T \quad \text{Watt} \quad (4.20)$$

### 4.3 Erros

#### 4.3.1 Regeneração do sinal digital

Suponhamos uma transmissão digital binária unipolar. Os símbolos transmitidos são pulsos rectangulares com  $T_s$  s de duração que podem tomar apenas dois valores, isto é, o símbolo  $k$  terá amplitude  $a_k = 0$  ou  $a_k = A$  consoante represente, respectivamente, o valor lógico 0 ou o valor lógico 1. Seja  $t_k$  o instante dentro do intervalo do símbolo  $k$  em que o receptor toma uma decisão sobre o valor desse símbolo. Esta decisão é tomada

<sup>7</sup>um sistema de ordem superior à 1<sup>a</sup> possuindo, portanto, uma banda de transição mais estreita

com base no valor do sinal  $y(t)$  à entrada do receptor no instante  $t_k$

$$y(t_k) = a_k + n(t_k)$$

instante em que, para o efeito, é obtida uma *amostra* do sinal recebido cuja amplitude,  $y(t_k)$ , é *mantida*<sup>8</sup> constante durante um tempo igual à duração do símbolo,  $T_s$ . O valor de  $y(t_k)$  será a soma da amplitude do sinal com a amplitude do ruído naquele instante, previamente filtrada por um filtro passa-baixo de modo a limitar a potência total do ruído à entrada do receptor. O procedimento de decisão culmina com a comparação entre os sucessivos valores de  $y(t_k)$  e uma *amplitude de limiar* fixa,  $V$ . A resposta do comparador será uma amplitude maior do que zero, indicando o valor lógico 1, ou zero, indicando o valor lógico 0, consoante  $y(t_k) > V$  ou  $y(t_k) < V$  respectivamente.

O comparador produz, assim, uma estimativa  $\tilde{x}(t)$  do sinal que foi transmitido,  $x(t)$ . Estes procedimentos são ilustrados nas figuras 4.5 e 4.6 que representam os sub-sistemas componentes do receptor e as respectivas formas de onda e constituem o que se designa por *regeneração* do sinal.

Na realidade o regenerador comporta-se como um conversor analógico-digital ao converter a forma de onda analógica ruidosa  $y(t)$  num sinal digital sem ruído,  $\tilde{x}(t)$ , ocasionalmente com erros.

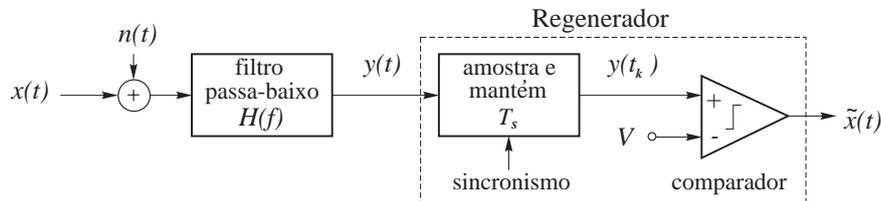


Figura 4.5: Receptor binário de banda de base

### 4.3.2 Probabilidade de erro

Existe erro na transmissão digital quando a estimativa não coincide com o valor transmitido, isto é, quando  $\tilde{x}(t_k) \neq x(t_k)$  o símbolo  $k$  está errado. Interessa conhecer a probabilidade de isto acontecer pois será uma *medida*

<sup>8</sup>trata-se da função *amostra-e-mantém* (ou *sample-and-hold*, S/H)

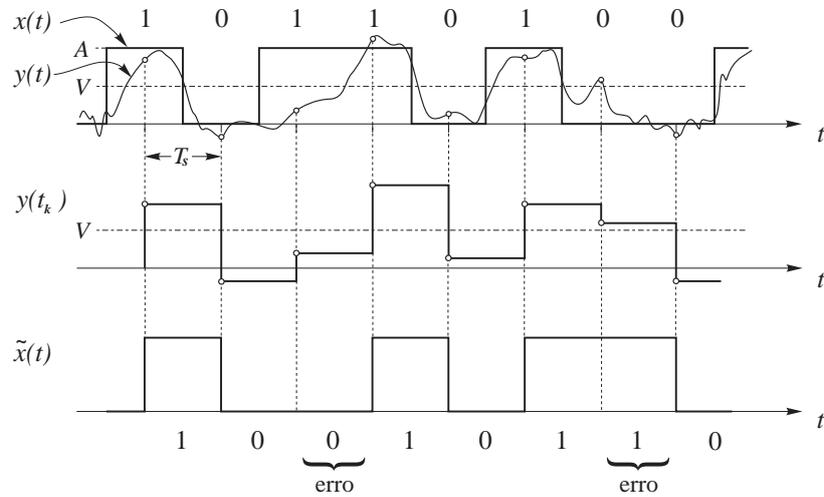


Figura 4.6: Regeneração de um sinal binário unipolar

importante da qualidade, ou desempenho, do sistema de transmissão digital. Prosseguindo na análise da transmissão unipolar, pode dizer-se, intuitivamente, que a amplitude de limiar,  $V$ , deve situar-se num valor intermédio  $0 < V < A$ . A regeneração dará origem a erro se, no instante da amostragem:

- o símbolo transmitido é o 0 ( $a_k = 0$ ) e o ruído excede  $V$  ( $n(t_k) > V$ ),  
ou
- o símbolo transmitido é o 1 ( $a_k = A$ ) e a soma do ruído com  $A$  é inferior a  $V$  ( $n(t_k) + A < V$ )

o que se traduz na seguinte expressão para a probabilidade de erro onde  $P(X)$  representa a probabilidade do evento  $X$ :

$$P_e = P(a_k = 0) \cdot P(n(t_k) > V) + P(a_k = A) \cdot P(n(t_k) + A < V) \quad (4.21)$$

Dado que o ruído é estacionário  $P(n(t_k) = x_0) = P(n(t) = x_0) = P(n = x_0) \quad \forall t, t_k$ , isto é, a probabilidade do ruído ter um valor de amplitude igual a  $x_0$  é independente do tempo, pelo que

$$P_e = P(a_k = 0) \cdot P(n > V) + P(a_k = A) \cdot P(n < V - A) \quad (4.22)$$

ou, escrita de uma forma mais condensada

$$P_e = P_0 \cdot P_{e0} + P_1 \cdot P_{e1} \quad (4.23)$$

Estamos a supôr que a ocorrência dos sucessivos valores dos símbolos transmitidos são estatisticamente independentes. Por outro lado espera-se que a ocorrência de 0s e 1s numa mensagem longa seja equiprovável, hipótese que é razoável admitir<sup>9</sup>, ou seja,  $P(a_k = 0) = P(a_k = A) = \frac{1}{2}$ , donde

$$P_e = \frac{1}{2} [P(n > V) + P(n < V - A)] \quad (4.24)$$

em que

$$P_{e0} = P(n > V) = \int_V^\infty p_N(n) dn = Q\left(\frac{V}{\sigma_n}\right) \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} P_{e1} &= P(n < V - A) = \int_{-\infty}^{V-A} p_N(n) dn \\ &= \int_{-\infty}^V p_N(n - A) dn = Q\left(\frac{A - V}{\sigma_n}\right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

e  $Q(k)$  é a probabilidade da cauda gaussiana<sup>10</sup>. O ábaco da tabela 4.2, no fim deste capítulo, permite determinar alguns valores para  $Q(k)$ . A probabilidade de erro pode ser escrita sob a forma

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ Q\left(\frac{V}{\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{A - V}{\sigma_n}\right) \right] \quad (4.27)$$

Se os símbolos são originalmente equiprováveis e se o ruído, em média, afecta igualmente os símbolos transmitidos independentemente da amplitude destes, então não há razão para que o regenerador altere esta regra produzindo uma sequência  $\tilde{x}(t)$  em que os símbolos não sejam equiprováveis. Isto significa que o valor óptimo da amplitude de limiar,  $V_{opt}$ , que é também o valor que minimiza  $P_e$ , se deve situar no ponto onde as duas *funções de densidade de probabilidade* se intersectam — o ponto médio do intervalo  $[0, A]$  — ao qual correspondem áreas de cauda iguais e portanto probabilidades de erro iguais. Assim sendo,  $V_{opt} = A/2$ .

<sup>9</sup>como se justificará mais adiante na Teoria da Informação

<sup>10</sup> $Q(k)$  é a probabilidade de uma variável aleatória gaussiana de média  $m$  e variância  $\sigma^2$  tomar um valor maior do que  $m + k\sigma$ , ié,

$$Q(k) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty e^{-x^2/2} dx$$

também chamada *área sob a cauda gaussiana*

A figura 4.7 ilustra esta discussão mostrando uma situação em que  $V < V_{opt} = A/2$ . Neste caso, a área sombreada mais escura é menor do que a área sombreada mais clara, significando que a probabilidade de erro quando  $a_k = A$  será menor do que a probabilidade de erro quando  $a_k = 0$ , decidindo o regenerador mais favoravelmente pelo valor 1 do que pelo valor 0, em média. Com  $V = V_{opt} = A/2$  tem-se  $Q\left(\frac{V}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{A-V}{\sigma_n}\right) =$

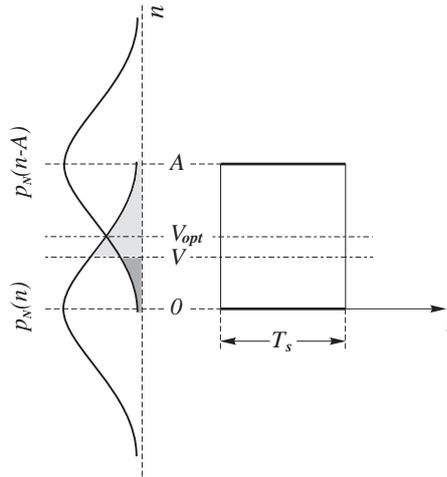


Figura 4.7: *Fdps*, amplitude de limiar de decisão e probabilidades de erro

$Q\left(\frac{A}{2\sigma_n}\right)$  pelo que da equação 4.27 resulta finalmente a probabilidade de erro para a transmissão binária unipolar

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma_n}\right) \quad (4.28)$$

No caso geral em que os símbolos gerados pelo emissor não são equiprováveis, o valor óptimo da amplitude de limiar, que minimiza  $P_e$ , é a solução da equação  $\frac{dP_e}{dV} = 0$  com  $P_e$  definido pela equação 4.22. A resolução desta equação que envolve a diferenciação dos integrais 4.25 e 4.26, conduz à seguinte relação

$$P_0 \cdot P(n > V_{opt}) = P_1 \cdot P(n < V_{opt} - A) \quad (4.29)$$

Os valores  $\sigma_n$  e  $A$  podem expressar-se em função das potências médias do ruído e do sinal respectivamente, dado que  $N = \sigma_n^2$  e, para o sinal

unipolar,  $S = A^2/2$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{1}{2} \frac{S}{N}}\right) \quad (4.30)$$

Por outro lado o filtro passa-baixo à entrada do regenerador não pode ter largura de banda inferior a metade do ritmo de símbolos, isto é,  $B_T \approx B_N \geq r_s/2$  pelo que a potência do ruído é sempre

$$N = \eta B_T \geq \eta \frac{r_s}{2} \quad (4.31)$$

podendo-se obter o seguinte limite inferior para a probabilidade de erro

$$P_e \geq Q\left(\sqrt{\frac{S}{\eta r_s}}\right) \quad (4.32)$$

donde se conclui que, para a mesma potência média do sinal e densidade de ruído, a probabilidade de erro aumenta quando o ritmo de símbolos aumenta (e vice-versa).

É usual, ainda, representar  $P_e$  em função da *energia média por símbolo*,  $E_s$ . Para tal basta notar que  $E_s = S \cdot T_s = S/r_s$  Joules e vem

$$P_e \geq Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right) \quad (4.33)$$

A quantidade

$$\gamma_s = \frac{E_s}{\eta} \quad (4.34)$$

é um parâmetro importante na medida de desempenho de sistemas de transmissão digitais e é comparável ao parâmetro *razão sinal-ruído*,  $\frac{S}{N}$  que é mais utilizado para a medida de desempenho de sistemas de transmissão analógicos.

Os casos de outros códigos de linha podem ser tratados de forma semelhante. Na codificação binária *polar*, por exemplo, os símbolos terão amplitudes  $a_k = \pm A/2$ . A amplitude de limiar mantém o seu valor relativo a estas amplitudes, isto é,  $V_{opt} = 0$  e a potência média do sinal será  $S = A^2/4$ .

A tabela 4.1 resume as várias formas de expressar a probabilidade de erro para os sinais unipolares e polares.

Tabela 4.1: Probabilidades de erro

$P_e$	
Unipolar	Polar
$Q\left(\frac{A}{2\sigma_n}\right)$	$Q\left(\frac{A}{2\sigma_n}\right)$
$Q\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{S}{N}\right)$	$Q\left(\sqrt{\frac{S}{N}}\right)$
$\geq Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right)$	$\geq Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\eta}}\right)$
$\geq Q(\sqrt{\gamma_s})$	$\geq Q(\sqrt{2\gamma_s})$

**Exêmplo 4.2** Um computador transmite por uma porta de comunicações, pulsos unipolares ao ritmo de  $10^6$  bps = 1 Mbps para transmissão por um sistema com ruído de densidade espectral de potência  $4 \times 10^{-20}$  W/Hz. Pretende-se determinar o valor para a potência média do sinal de modo a que a taxa de erros não exceda um bit por hora.

Tem-se portanto  $r_s = 10^6$  e  $\eta = 4 \times 10^{-20}$ . A taxa de erros máxima define o valor máximo da probabilidade de erro que é

$$\begin{aligned}
 P_e &= \frac{n^o \text{ de dígitos errados em 1 hora}}{n^o \text{ total de dígitos transmitidos em 1 hora}} \\
 &\leq \frac{1}{3600 \times r_s} = \frac{1}{3600 \times 10^6} \approx 2.8 \times 10^{-10}
 \end{aligned}$$

consultando o ábaco de  $Q(k)$  verifica-se que  $Q(6.2) \approx 2.8 \times 10^{-10}$  e, como o sinal é unipolar,  $\sqrt{S/\eta r_s} = 6.2$ , donde resulta

$$\begin{aligned}
 S &\geq 6.2^2 \times \eta r_s = 6.2^2 \times 4 \times 10^{-20} \times 10^6 \approx 1.5 \times 10^{-12} = 1.5 \text{ pW} \\
 S_{dBm} &\geq -88 \text{ dBm}
 \end{aligned}$$

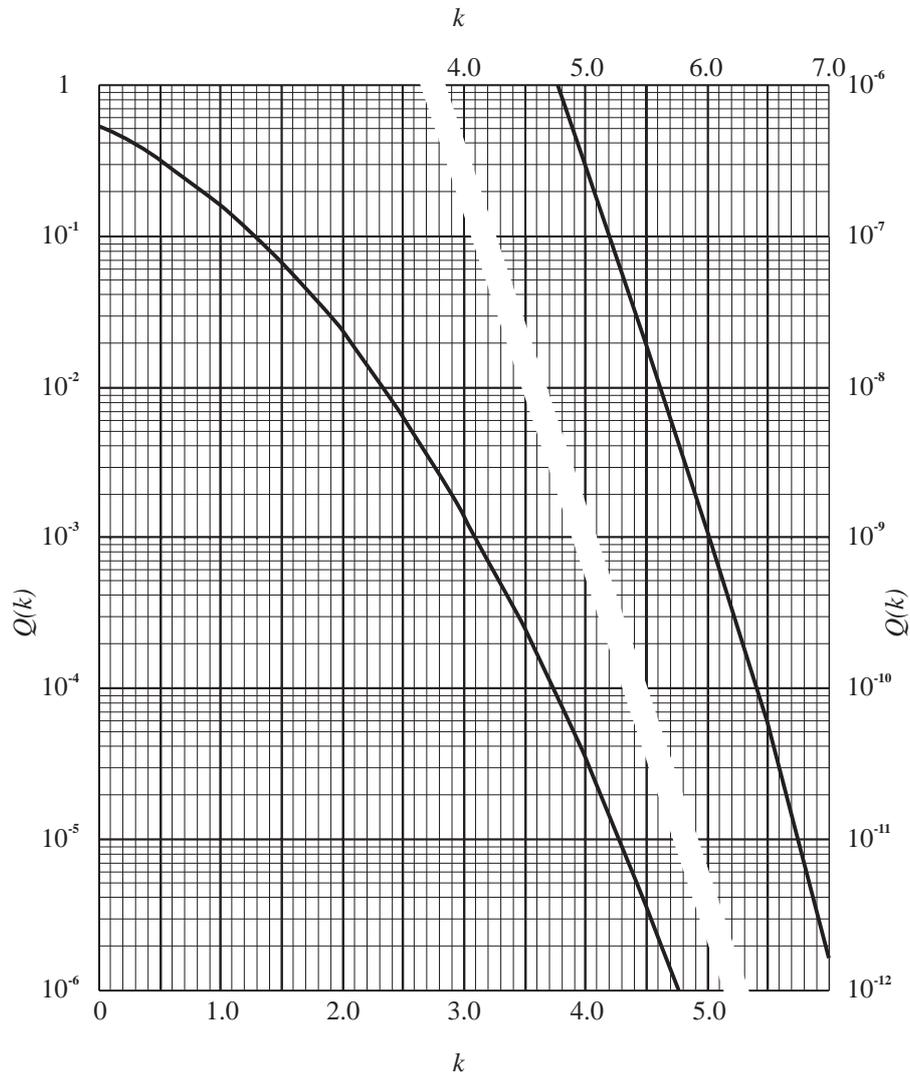
Trata-se de um valor bastante pequeno. No entanto representa a potência mínima do sinal que deve chegar ao receptor. Se se pretendesse determinar a potência mínima do sinal no transmissor dever-se-ia adicionar a este valor a atenuação introduzida pelo sistema de transmissão.

Tabela 4.2: Probabilidades da Cauda Gaussiana

A probabilidade de uma variável aleatória gaussiana de média  $m$  e variância  $\sigma^2$  tomar um valor maior do que  $m + k\sigma$  é dada por

$$Q(k) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

$$P(X > m + k\sigma) = P(X \leq m - k\sigma) = Q(k)$$



## 4.4 Problemas

4.1 – A partir da equação 4.11 calcule o valor eficaz (raiz do valor quadrático médio) do ruído térmico aos terminais de uma resistência de  $1 \Omega$  à temperatura de 29 Kelvin. Utilize a equação 4.12 para determinar qual a percentagem desse valor que é devida às componentes de frequência do ruído na banda  $|f| < 1 \text{ GHz}$ .

4.2 – Considere o sistema de Butterworth de ordem- $n$  definido por

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{B_T}\right)^{2n}}}$$

Mostre que a largura de banda equivalente de ruído está relacionada com a largura de banda a 3 dB por

$$B_N = \frac{\pi B_T}{2n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

e que portanto  $B_N \rightarrow B_T$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Sugestão: Notar que  $\int_0^{-\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi n}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)}$  para  $n > m > 0$ .

4.3 – Considere um sistema de transmissão para sinais binários unipolares com símbolos equiprováveis e  $S/N = 50$  no receptor. Calcule as probabilidades de erro para cada um dos dois símbolos  $P_{e0}$  e  $P_{e1}$  e a probabilidade total de erro  $P_e$  quando a amplitude de limiar tem um valor não-ótimo  $V = 0.4 A$ . Compare o valor de  $P_e$  com o valor mínimo dado pela equação 4.28.

4.4 – Determine a razão  $S/N$  no receptor de um sistema binário unipolar com ruído branco e gaussiano de modo a que  $P_e = 0.001$ . Qual seria a probabilidade de erro de um sistema polar com a mesma  $S/N$ ?

4.5 – Um sistema de transmissão binário é afectado de ruído branco e gaussiano com densidade  $\eta = 10^{-14} \text{ Watt/Hz}$ . Sabendo que o ritmo de transmissão é de 1 Mbps determine qual deve ser a potência média do sinal no receptor, para sinalização tanto polar como unipolar, por forma a que a probabilidade de erro não exceda um bit em um milhão.

fim do capítulo 4