Capítulo 3

Análise de Sistemas

3.1 Transmissão e Filtragem de Sinais

A *transmissão* de um sinal é o processo pelo qual uma forma de onda eléctrica transita de uma fonte para um destino, desejavelmente, sem sofrer alteração na sua forma (distorção). Por outro lado a *filtragem* de um sinal é uma operação que, propositadamente e a fim de atingir determinado objectivo, altera o espectro do sinal e, consequentemente, a sua forma, ou seja introduz no sinal uma distorção propositada. No entanto, tanto os *sistemas de transmissão* como os *filtros* são modelados de forma semelhante, normalmente por funções de relação entrada-saída. O sinal que se obtém à saída de um sistema como resultado da introdução de um determinado sinal na sua entrada designa-se por *resposta* do sistema a esse sinal de entrada.

Neste capítulo iremos caracterizar os *sistemas* em termos da função razão *resposta-entrada* designada por *função de transferência* do sistema utilizando-a depois para analisar os efeitos do sistema na transmissão ou filtragem dos sinais que por ele transitam.

3.2 Sistemas lineares e invariantes no tempo

A figura 3.1 representa um sistema sob a forma de uma *caixa preta* com um *sinal de entrada* $x(t)$ e um *sinal de saída* $y(t)$. No contexto das comunicações eléctricas, o sistema é normalmente um circuito com dois pares de polos (ou portas) por exêmplo uma linha de transmissão ou um cabo coaxial, um amplificador de potência de sinal, um filtro, etc ou uma combinação de elementos destes tipos. Na porta de entrada, é aplicado o sinal de entrada, de tensão ou de corrente, que dará origem a um sinal de saída também eléctrico, na porta de saída. Representaremos esta relação causal

Figura 3.1: Sistema visto como uma *caixa preta*

de entrada-resposta da seguinte forma

$$x(t) \to y(t)$$

Estamos interessados apenas numa classe importante de sistemas que é a dos sistemas *lineares e invariantes no tempo (LIT).*

Um sistema é linear se, quando

$$\begin{aligned} x_1(t) &\to y_1(t) \\ x_2(t) &\to y_2(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

então

$$a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \to a\,y_1(t) + b\,y_2(t) \tag{3.2}$$

em que a e b são constantes, independentes de t.

Um sistema é invariante no tempo se

$$x(t - t_1) \to y(t - t_1) \tag{3.3}$$

em que t_1 é uma constante. A propriedade de invariância no tempo significa que as características do sistema permanecem *fixas* ao longo do tempo, ou seja, um mesmo sinal de entrada aplicado à entrada do sistema t_1 segundos mais tarde produz a mesma saída também t_1 segundos mais tarde.

3.3 Função de transferência

Os elementos (componentes) eléctricos que constituem o sistema, quer sejam passivos quer sejam activos, farão com que o sinal à saída tenha uma forma diferente do da entrada. Independentemente do que estiver dentro da caixa preta, um sistema pode ser sempre caracterizado por uma relação *excitação-e-resposta* entre a entrada e a saída.

A questão fundamental que se coloca é a seguinte: Quais os $x(t)$ que passam pelo sistema sem alteração de forma? Isto é, quais os $x(t)$ tais que

$$y(t) = H \cdot x(t) \tag{3.4}$$

em que H é um escalar, independente de t. Os sinais $x_i(t)$ que satisfazem esta condição constituem as *funções próprias* ou *invariantes* do sistema. Vamos mostrar que se o sistema é LIT os invariantes são da forma

$$x_i(t) = e^{st} \tag{3.5}$$

em que s é uma constante, em geral complexa.

Suponhamos então que se introduz à entrada de um sistema LIT um sinal da forma indicada em (3.5) e procuremos determinar a forma da resposta correspondente $y_i(t)$, isto é,

$$x_i(t) = e^{st} \to y_i(t) \tag{3.6}$$

Se multiplicarmos o sinal $x_i(t)$ por uma constante e^{-st_1}, obter-se-á pela propriedade linear

$$e^{-st_1} \cdot x_i(t) = e^{s(t-t_1)} \to e^{-st_1} \cdot y_i(t) \tag{3.7}$$

e se aplicarmos $x_i(t)$ à entrada t_1 segundos mais tarde obter-se-á pela propriedade de invariancia no tempo

$$x_i(t-t_1) = e^{s(t-t_1)} \to y_i(t-t_1) \tag{3.8}$$

donde se conclui, de (3.7) e (3.8) que

$$e^{-st_1} \cdot y_i(t) = y_i(t-t_1) \tag{3.9}$$

cuja única solução é

$$y_i(t) = H \cdot e^{st} \tag{3.10}$$

com H independente de t mas eventualmente dependente da constante complexa $s = a + \jmath b$. O resultado (3.10) mostra que tem de ser $x_i(t) = e^{st}$. Se na constante complexa se fizer $a = 0$ e $b = 2\pi f$, a família de sinais $x_i(t)$ pode ser escrita sob a forma

$$\begin{aligned} x_i(t) &= e^{\jmath 2\pi f t} \qquad \text{ou} \\ x_i(t) &= \cos(2\pi f t) + \jmath \sin(2\pi f t) \end{aligned} \tag{3.11}$$

o que significa que as exponenciais complexas, ou seja, os sinais oscilatórios no tempo são invariantes do sistema LIT e *passam* através dele sem alteração de forma a menos de um factor multiplicativo constante H (que actua na amplitude e na fase da oscilação). Embora independente de t, H é função de s ou seja, uma função da frequência $H = H(f)$ e designa-se *função de transferência* do sistema.

Portanto qualquer sinal vê cada uma das suas componentes espectrais *passar* no sistema sem alteração de forma mas com alteração de amplitude consoante a frequência. Isto é, se $x(t) \to y(t)$ a relação entre os respectivos espectros é

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \tag{3.12}$$

dado que os espectros não são mais do que combinações lineares de funções circulares — as harmónicas dos sinais —, que são invariantes do sistema. Esta relação extremamente simples constitui a base da análise de sistemas no domínio da frequência. Diz-nos que o espectro do sinal de saída $Y(f)$ se obtém multiplicando o espectro do sinal de entrada $X(f)$ pela função de transferência $H(f)$ e é esta noção que a figura 3.2 representa. A função

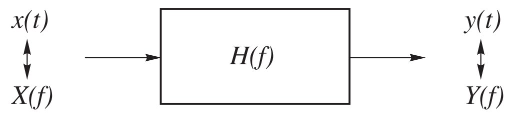


Figura 3.2: Resposta em frequência de um sistema LIT

$H(f)$ é também designada de *resposta em frequência* do sistema. Neste sentido, trata-se de uma resposta natural e não de uma resposta forçada, isto é, trata-se de uma caractarística intrínseca do próprio sistema. O módulo $|H(f)|$ representa a característica de amplitude do sistema e o argumento a sua característica de fase e tem-se

$$|Y(f)| = |H(f)| \cdot |X(f)| \quad (3.13)$$
$$\arg Y(f) = \arg H(f) + \arg X(f) \quad (3.14)$$

Se $x(t)$ fôr um sinal de energia, então $y(t)$ é também um sinal de energia cuja densidade espectral de energia e energia total normalizadas são dadas respectivamente por

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 \cdot |X(f)|^2 \quad (3.15)$$
$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \, |X(f)|^2 \, df$$

e se $x(t)$ fôr um sinal de potência, tem-se igualmente

$$|C_y(nf_0)|^2 = |H(nf_0)|^2 \cdot |C_x(nf_0)|^2 \quad (3.16)$$
$$S_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(nf_0)|^2 \cdot |C_x(nf_0)|^2 \, df \quad (3.17)$$

3.4 Largura de banda de transmissão

A equação 3.16 indica, nomeadamente, que a potência de cada componente espectral (sinusoidal) do sinal de entrada de frequência $f_k = k\, f_0$, isto é, o quadrado da sua amplitude, $|C_x(f_k)|^2$, é afectada multiplicativamente pelo valor do quadrado da função de transferência a essa frequência, $|H(f_i)|^2$, dando o valor da potência do sinal de saída a essa frequência, $|C_y(f_k)|^2$ sendo a potência total (normalizada), S_y, do sinal de saída dada pela equação 3.17.

Como se verá mais adiante, se $|C_y(f_k)|^2 > |C_x(f_k)|^2$ diz-se que há um *ganho* de potência à frequência f_k e se $|C_y(f_k)|^2 < |C_x(f_k)|^2$ diz-se que há uma *atenuação* a essa frequência. Os termos *ganho* e *atenuação* podem ser usados alternativamente visto que é simples de verificar que são o inverso um do outro, isto é, por exêmplo, dizer que um sistema possui uma atenuação de 5 a uma determinada frequência é equivalente a dizer que possui um ganho de $\frac{1}{5}$ a essa frequência.

Na caracterização de sistemas, quer de transmissão quer de filtros de sinal, são importantes os conceitos de banda de transmissão, largura de banda e frequências de corte que se passam a definir.

Definição 3.1 — Banda de transmissão de um sistema
É o intervalo de frequências positivas no qual o ganho do sistema é não inferior a $\frac{1}{2}$ do ganho máximo.

A banda de transmissão de um sistema também é designada de *banda passante* do sistema (ver figura 3.13).

Definição 3.2 — Largura de Banda de um sistema
É a amplitude da banda de transmissão desse sistema.

Definição 3.3 — Frequências de corte de um sistema
São as frequências positivas limites da banda de transmissão do sistema.

Assim, por exêmplo, um sistema cuja banda de transmissão é $\mathcal{B}_T = [85$ Khz, 110 KHz$]$ tem largura de banda $B_T = 25$ KHz e frequências de corte $f_{c_i} = 85$ KHz e $f_{c_s} = 110$ KHz.

3.5 Sistema de primeira ordem

Vamos ilustrar estes conceitos recorrendo, como exêmplo, a um sistema linear de primeira ordem. Alguns sistemas simples podem ser modelados, sob o ponto de vista entrada-saída, por um circuito eléctrico RC. É o caso, por exêmplo, de uma linha de transmissão constituida por um par de fios condutores. Os condutores possuem uma resistência eléctrica distribuida ao longo do seu comprimento a qual pode ser modelada por uma resistência concentrada de valor R Ohms colocada em série entre a entrada e a saída. Pelo facto de se encontarem próximos, separados ou pelo ar ou por um outro meio isolante, existe entre os condutores uma certa capacidade eléctrica, também distribuida, que se pode modelar por um condensador (concentrado) colocado em paralelo entre a entrada e a saída, de valor igual à capacidade total, C Farads. A figura 3.3 ilustra este modelo, ou seja, trata-se de um circuito eléctrico RC, passivo, sob a forma de uma malha com duas portas e com uma tensão eléctrica de entrada $x(t)$ e uma tensão eléctrica de saída, $y(t)$. Procuremos a equação que rege o funcionamento deste circuito. A tensão de entrada provocará uma corrente $i(t)$ na malha, como se indica. Tomando em consideração as polaridades de referência indicadas, a tensão $x(t)$ será a soma da tensão na resistência

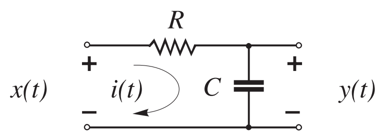


Figura 3.3: Modelo eléctrico de um sistema de primeira ordem

com a tensão no condensador, sendo esta última precisamente o valor de $y(t)$. A equação da malha é então

$$R\,i(t) \;+\; y(t) \;=\; x(t) \tag{3.18}$$

A diferença de potêncial instantânea aos terminais de um condensador, $y(t)$, é o quociente entre a carga instantânea, $q(t)$, e o valor da capacidade, C, sendo a corrente que nele passa, $i(t)$, definida pela variação da carga instantânea aos terminais do condensador. Teremos portanto

$$y(t) \;=\; \frac{q(t)}{C} \qquad \text{e} \qquad i(t) \;=\; \frac{dq(t)}{dt} \qquad \text{donde} \qquad i(t) \;=\; C\,\frac{dy(t)}{dt}$$

substituindo este valor de $i(t)$ na equação 3.18 obtem-se a equação que procuramos

$$RC\,\frac{dy(t)}{dt} \;+\; y(t) \;=\; x(t) \tag{3.19}$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem, razão pela qual o sistema (circuito) da figura 3.3 se designa por sistema linear de primeira ordem.

3.5.1 Função de transferência do sistema de 1ª ordem

A função de transferência, H, deste sistema determina-se então resolvendo a equação 3.19 para o sinal de entrada invariante do sistema, isto é, $x_i(t) = e^{\jmath 2\pi f t}$ que produz à saída o sinal $y_i(t) = H \cdot e^{\jmath 2\pi f t}$ conforme se mostrou na secção 3.3

$$\begin{aligned}
RC\,\frac{d}{dt}\left[H \cdot e^{\jmath 2\pi f t}\right] \;+\; H \cdot e^{\jmath 2\pi f t} \;&=\; e^{\jmath 2\pi f t} \\
H \cdot \jmath 2\pi f RC\; e^{\jmath 2\pi f t} \;+\; H \cdot e^{\jmath 2\pi f t} \;&=\; e^{\jmath 2\pi f t} \\
H \cdot [1 \;+\; \jmath 2\pi f RC] \;&=\; 1
\end{aligned} \tag{3.20}$$

donde resulta imediatamente a expressão para a função de transferência

$$H(f) \;=\; \frac{1}{1 + \jmath 2\pi f RC} \tag{3.21}$$

A *característica de amplitude*, também designada por *resposta de am-*

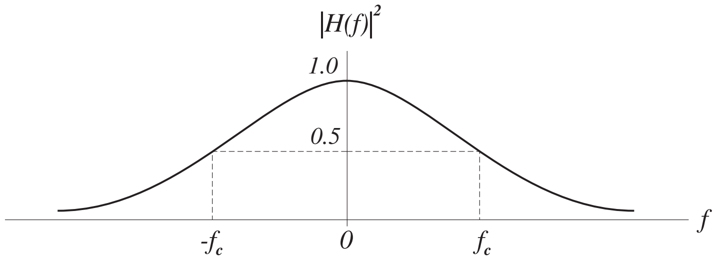


Figura 3.4: Característica de potência de um sistema de primeira ordem

plitude, do sistema, é dada pelo módulo $|H(f)|$. Mas a característica mais significativa é a que relaciona a potência (ou a energia) dos sinais de entrada e de saída, isto é $|H(f)|^2$, como mostra a equação 3.15

$$|H(f)|^2 \;=\; \frac{1}{1 + (2\pi f RC)^2} \tag{3.22}$$

a qual tem uma representação gráfica que se mostra na figura 3.4.

3.5.2 Largura de banda do sistema de primeira ordem

A figura 3.4 indica o valor da frequência, f_c, acima da qual $|H(f)|^2$ vem reduzida de mais de $\frac{1}{2}$ do seu valor máximo que neste caso é $|H(f)|^2_{max} = 1.0$.

No caso concreto deste sistema, todas as componentes de um sinal de entrada de frequência superior a f_c vêm a sua potência (ou energia) *atenuadas* de um factor de valor superior a $\frac{1}{2}$ e todas as componentes de frequência inferior a f_c atenuadas de um factor de valor inferior àquele.

As frequências de corte do sistema são 0 e f_c, a banda de transmissão é $\mathcal{B}_T = [0, f_c]$ Hz e a largura de banda é $B_T = f_c$ Hz.

Para o caso do sistema de primeira ordem, caracterizado pela função de transferência 3.21, as frequências de corte são dadas pelas raizes da equação

$$|H(f)|^2 \;=\; \frac{1}{2}\,|H(0)|^2$$

ou seja $\dfrac{1}{1+(2\pi f_c RC)^2} = \dfrac{1}{2}$ donde $f_c = \pm\dfrac{1}{2\pi RC}$

pelo que, de acordo com a definição, a largura de banda de transmissão deste sistema será $B_T = |f_c - 0|$, ou seja

$$B_T = \frac{1}{2\pi RC} \tag{3.23}$$

A função de transferência do sistema de primeira ordem representado pela equação 3.21 pode então escrever-se da seguinte forma

$$H(f) = \frac{1}{1 + \jmath\,\dfrac{f}{B_T}} \tag{3.24}$$

3.5.3 Resposta temporal do sistema

A partir de um modelo eléctrico simplificado de um sistema passa-baixo de 1ª ordem que é o circuito RC da figura 3.3 descrito pela equação 3.18, deduziu-se a função de transferência indicada na equação 3.21 que se aplica apenas a sinais sinusoidais. Esta função relaciona os espectros dos sinais de entrada e de saída do sistema, ou seja, as suas componentes harmónicas (os invariantes do sistema) mas não relaciona directamente os próprios sinais como funções do tempo, $x(t)$ e $y(t)$.

Iremos agora obter relações deste último tipo, isto é, relações entre um sinal de entrada e a sua resposta (saída) no domínio do tempo verificando directamente qual a *forma* do sinal que se obtém à saída de um sistema como resposta a um sinal de entrada com determinada *forma*.

Para o caso de um sinal geral esta análise envolve a operação de convolução (ver secção 3.10) cuja importância, embora essêncial em processamento de sinais, sai fora do âmbito deste curso, pelo que restringir-nos-emos apenas ao caso de sinais digitais (discretos) simples em sistemas de 1ª ordem.

Um sinal digital consiste numa sequência de escalões positivos e negativos de tensão entre amplitudes discretas (rectângulos) representando níveis lógicos, não necessariamente binários, que designamos por *símbolos* e que se repetem a um ritmo r_s símbolos por segundo. O ritmo de símbolos é igual ao inverso do tempo de duração do símbolo, T_s segundos, isto é

$$r_s = \frac{1}{T_s} \tag{3.25}$$

Partamos novamente da equação do sistema (3.19) e determinemos então a resposta do sistema de 1ª ordem da figura 3.3 a um escalão positivo de amplitude unitária, ou seja, ao sinal de entrada definido por

$$x_1(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t \leq 0 \\ 1 & \text{para} \quad t > 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

Uma condição de fronteira óbvia para a equação diferencial é ter-se $y_1(t) = 0$ para $t \leq 0$, ou seja, o sinal de saída deve ser nulo antes do escalão de entrada se manifestar. Nestas condições a solução da equação 3.19 é

$$y_1(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{para} \qquad t > 0 \tag{3.27}$$

ou seja, um sinal que cresce exponencialmente para a amplitude $y(\infty) = 1$. De igual forma, a resposta ao escalão negativo de amplitude unitária

$$x_2(t) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{para} \quad t \leq 0 \\ 0 & \text{para} \quad t > 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

com a condição de fronteira $y_2(t) = 1$ para $t \leq 0$ será

$$y_2(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{para} \qquad t > 0 \tag{3.29}$$

Se se atender agora ao resultado obtido na secção 3.4 para a largura de banda deste sistema, expresso pela relação 3.23, as soluções 3.27 e 3.29 podem escrever-se, em função dessa largura de banda, respectivamente

$$\begin{array}{llll} \text{escalão positivo} & y_1(t) \;=\; 1 - e^{-2\pi B_T t} & \text{para} & t > 0 \\ \text{escalão negativo} & y_2(t) \;=\; e^{-2\pi B_T t} & \text{para} & t > 0 \end{array} \tag{3.30}$$

A figura 3.5 ilustra a forma da resposta para cada uma destas entradas em escalão. Em conclusão, quando a entrada é uma transição abrupta a saída correspondente transita exponencialmente entre o nível inicial e final da entrada com um *tempo de subida*, t_s (ou de *descida*), tanto maior quanto maior fôr o valor do produto RC, ou seja, quanto menor fôr a largura de banda que é $B_T = \frac{1}{2\pi RC}$.

Consideremos agora a figura 3.6 na qual à entrada do sistema se tem uma sequência de símbolos binários rectangulares representativos de uma transmissão de dados. Esta sequência constitui um sinal $x(t)$ que pode ser descrito por combinação linear de $x_1(t)$ e $x_2(t)$

$$x(t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} x_1[t - 2kT_s] - x_2[t - (2k+1)T_s]$$

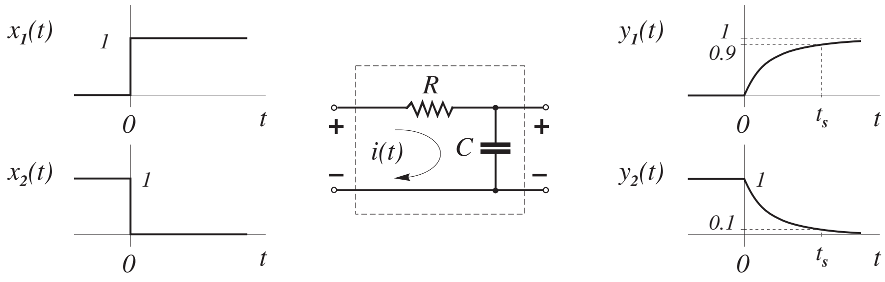


Figura 3.5: Resposta ao escalão de um sistema LIT PB de 1ª ordem

e dado que se trata de um sistema linear e invariante no tempo, o sinal de saída será

$$y(t) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} y_1[t - 2kT_s] - y_2[t - (2k+1)T_s]$$

que é constituida pela sequência de exponenciais crescentes e decrescentes indicada na figura.

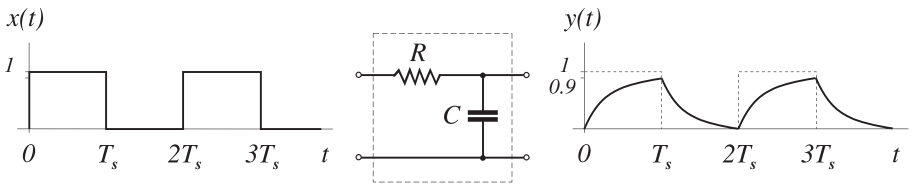


Figura 3.6: Resposta digital de um sistema LIT PB de primeira ordem

3.5.4 Ritmo máximo de símbolos digitais

O resultado expresso na figura 3.6 mostra que a resposta ao símbolo digital de duração T_s se estende, à saída, por um tempo igual a $2\,T_s$ o que significa que, para se evitar que haja interferência entre símbolos, o símbolo seguinte só pode ser transmitido $2\,T_s$ segundos depois do início da transmissão do anterior.

Para se obter o maior ritmo possível de símbolos, a duração do símbolo deve ser a menor possível. Porém, esta duração não pode ser arbitrariamente pequena e está limitada pela largura de banda do sistema B_T a qual, no domínio do tempo, se traduz no tempo de subida t_s — ambos dependentes do valor do produto RC. Isto é, pelo menos a frequência fundamental do sinal, f_0, tem de estar contida na banda do sistema isto é

$$f_0 \leq B_T$$

e como se tem também sucessivamente

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{T_0} \\ T_0 &= 2\,T_s \\ T_s &= \frac{1}{r_s} \\ f_0 &= \frac{1}{2}\,r_s \end{aligned}$$

conclui-se a relação de Nyquist invocada sem justificação no Capítulo 1

$$\boxed{r_s \leq 2\,B_T} \tag{3.31}$$

O ritmo de símbolos $r_s = 2\,B_T$ é designado ritmo de Nyquist e é o ritmo máximo de símbolos a que se pode transmitir num sistema de largura de banda B_T sem que haja interferência entre símbolos.

3.6 Distorção do sinal na transmissão

Um sistema de transmissão de sinal é o canal eléctrico entre uma fonte de informação e um destino. Os vários sistemas existentes possuem complexidade variável, desde um simples par de fios até aos sofisticados *links* ópticos de *laser*. Mas todos eles possuem dois atributos físicos particularmente relevantes em comunicações: a dissipação interna de potência, cujo efeito é o de reduzir o sinal de saída, e o armazenamento interno de energia, que é variável para cada frequência — precisamente o que a função de transferência caracteriza — cujo efeito é o de alterar a forma do sinal de saída.

Formularemos pois as condições para a transmissão do sinal sem distorção em sistemas LIT de modo a podermos lidar com as respectivas funções de transferência. Referiremos ainda alguns dos tipos de distorção em sistemas de transmissão.

3.6.1 Transmissão isenta de distorção

Uma transmissão isenta de distorção é aquela em que o sinal de saída apresenta a mesma *forma* que o sinal de entrada[1]. Mais precisamente, dado um sinal de entrada $x(t)$, diremos que a resposta não se apresenta distorcida se só diferir da entrada por uma constante multiplicativa K e por um tempo de atraso constante e finito t_a o que, analiticamente, se exprime pela relação

$$y(t) \;=\; K\,x(t-t_a)$$

As propriedades de um sistema não distortivo podem ser deduzidas a partir do espectro da resposta

$$Y(f) \;=\; \mathcal{F}[y(t)] \;=\; K\,X(f)\,e^{-\jmath 2\pi t_a f}$$

como, por definição de função de transferência se tem $Y(f) = H(f) \cdot X(f)$, será

$$H(f) \;=\; K\,e^{-\jmath 2\pi t_a f} \tag{3.32}$$

por outras palavras, um sistema que transmita sem distorção deve possuir uma *característica de amplitude constante* e uma *característica de fase linear* de declive negativo

$$|H(f)| \;=\; |K| \qquad \text{e} \qquad \arg H(f) \;=\; -2\pi t_a f \tag{3.33}$$

Óbviamente, as condições representadas pelas equações 3.32 e 3.33 apenas se têm de verificar na banda de frequências onde o sinal possui conteúdo espectral significativo. De modo a clarificar este ponto, repare-se na figura 3.7 que mostra a densidade espectral de energia de um sinal típico de voz obtida experimentalmente. Dado que a densidade espectral é bastante pequena para $f < 200$ Hz ou $f > 4200$ Hz pode concluir-se que um sistema que satisfaça as equações 3.32 e 3.33 no intervalo $200 \leq |f| \leq 4200$ Hz transmitirá voz virtualmente sem distorção. Definem-se três tipos principais de distorção:

(i) *Distorção de Amplitude*, que ocorre quando $|H(f)| \neq |K|$

(ii) *Distorção de Atraso*, que ocorre quando $\arg H(f) \neq -2\pi t_a f$

(iii) *Distorção não-linear*, que ocorre quando o sistema possui componentes não-lineares.

Os dois primeiros agrupam-se sob a designação geral de distorção *linear*.

[1] qualquer que este seja e não apenas os invariantes

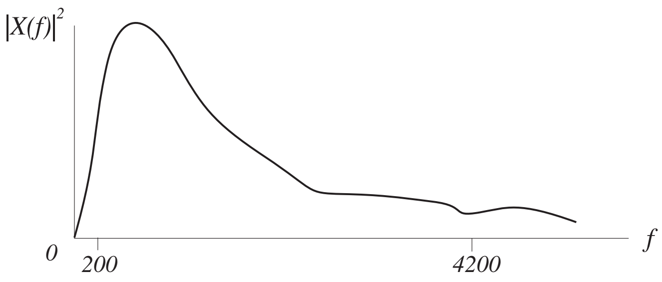


Figura 3.7: Densidade espectral de energia típica de um sinal de voz

3.6.2 Distorção Linear e Equalização

A distorção de amplitude é facilmente descrita no domínio da frequência. Uma distorção de amplitude significa que as amplitude das componentes de frequência do sinal à saida não estão na proporção correcta, isto é, umas são mais atenuadas que outras. Dado que este fenómeno se deve a $|H(f)|$ não ser constante ao longo da frequência, a distorção de amplitude é algumas vezes designada de *distorção de frequencia*. As formas mais comuns de distorção de amplitude são a atenuação ou a amplificação excessivas das componentes nos limites das baixas ou das altas frequências do espectro do sinal.

Na distorção de atraso as componentes de frequência sofrem atrasos não proporcionais à sua frequência. Sem haver distorção nas suas amplitudes, o efeito no sinal de saida é semelhante, isto é, a forma do sinal vem alterada, manifestando-se assim de forma selhante à distorção de amplitude. Este efeito pode ser fácilmente verificado se se sintetizar o sinal a partir das suas componentes tomando uma delas com um desvio de fase de, por exêmplo, 90^o. Facto interessante é o de o ouvido humano só ser sensível à distorção de amplitude e não à de atraso pelo que esta última não necessita de ser corrigida nos sistemas de audio. Já nos sistemas de transmissão de dados ambas são importantes e necessitam ser corrigidas ou minimizadas visto que a correcta detecção do sinal de dados depende não só da sua forma como de uma correcta localização no tempo dos elementos do sinal digital.

A distorção linear – tanto a de amplitude como a de atraso – é teóricamente corrigível através de *equalizadores*.

A figura 3.8 esquematiza um equalizador $H_{eq}(f)$ em série (em cascata) com um canal distortivo $H_C(f)$. Dado que a função de transferência

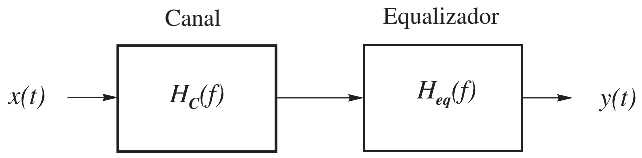


Figura 3.8: Canal terminando num equalizador

total é $H(f) = H_C(f)\, H_{eq}(f)$ a saida final estará isenta de distorção se $H_C(f)\, H_{eq}(f) = K\, e^{-j2\pi t_a f}$, onde K e t_a são constantes. Portanto, para corrigir a distorção linear, é necessário um equalizador com função de transferência

$$H_{eq}(f) \;=\; \frac{K\, e^{-j2\pi t_a f}}{H_C(f)} \tag{3.34}$$

para valores de f tais que $X(f) \neq 0$.

Rara é a situação em que é possível obter (ou projectar) um equalizador que satisfaça exactamente a equação 3.34 razão pela qual se disse que a equalização é uma correcção *teórica*. A técnica de equalização mais antiga é provávelmente aquela em que eram utilizadas *bobinas de carga* em linhas telefónicas. As bobinas constituiam indutores concentrados e eram colocados em série ao longo da linha, aproximadamente de quilómetro em quilómetro e o seu efeito era o de melhorar a característica de amplitude da linha como se mostra na figura 3.9 para uma linha carregada e não-carregada com bobinas (ver problema 3.4).

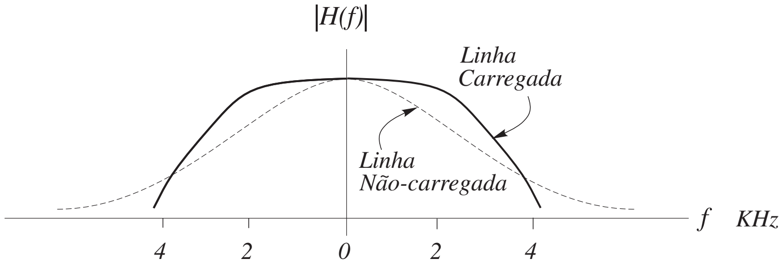


Figura 3.9: Característica de amplitude típica de uma linha telefónica

3.7 Perdas de Transmissão e Decibéis

Para além de distorcer o sinal, os sistemas de transmissão normalmente também reduzem a potência do sinal, ou seja, introduzem uma *perda de transmissão*. Embora esta perda possa ser compensada por amplificação de potência, o ruído, sempre presente ao longo do sistema, é também amplificado o que pode obviar à recuperação do sinal original. Começaremos por rever o conceito de *ganho* de potência e seguidamente o de *decibel* como medida de razão de potências.

3.7.1 Ganho de Potência

Suponhamos que a figura 3.10 representa um sistema LIT cujo sinal de entrada possui potência média P_e. Se o sistema não introduzir distorção a potência média do sinal à saída, P_s, será proporcional a P_e. O *ganho de potência* do sistema é então definido por

$$g \doteq \frac{P_s}{P_e} \tag{3.35}$$

que é um parâmetro constante do sistema. Os sistemas amplificadores nor-

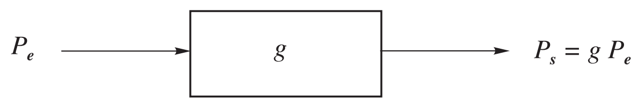


Figura 3.10: Sistema LIT com ganho de potência g.

malmente possuem valores de g muito elevados pelo que tem sido práctica corrente a utilização de uma escala logaritmica para representar e manipular esses valores. Assim, o ganho g em *decibéis* (dB) é definido por

$$g_{dB} \doteq 10 \log_{10} g \tag{3.36}$$

em que a letra B em dB se refere ao Bell em memória de Alexander Graham Bell que usou esta escala logarítmica pela primeira vez na medida de potências[2]. As potências de 10 são pois convertidas em produtos por

[2]A unidade Bell, B, é uma ordem de grandeza superior à unidade decibel, dB, ié, seria $g_B \doteq \log_{10} g$

10, por exêmplo $g = 10^m$ passa a ser $g_{dB} = m \times 10$ dB. O ganho de potência é sempre positivo mas podem ocorrer valores negativos em dB quando $0 < g \leq 1.0 = 10^0$ dando $-\infty < g_{dB} \leq 0$ dB. Notar que 0 dB corresponde a um ganho unitário, $g = 1$. Dado um valor em dB, o valor *linear* correspondente é

$$g \;=\; 10^{\frac{g_{dB}}{10}} \tag{3.37}$$

o que se obtém por inversão da equação 3.36. Enquanto que os decibéis representam sempre razões de potência, a própria potência de um sinal pode ser expressa em dB se se considerar relativa a uma potência fixa de referência e portanto dividida por essa referência. A potência de referência utilizada em telecomunicações para expressar potências em dB é o miliwatt e a correspondente *unidade* é designada por dBm:

$$P_{dBm} \;=\; 10\,\log_{10}\frac{P}{1\text{ mW}} \tag{3.38}$$

Assim, da equação 3.35 resulta

$$P_{s_{dBm}} \;=\; g_{dB} \;+\; P_{e_{dBm}} \tag{3.39}$$

que é uma forma bastante mais práctica para os cálculos de balanços de potências já que as multiplicações e divisões se transformam em somas e subtracções. Os engenheiros de comunicações trabalham normalmente em dBm dado que as potências dos sinais à saida dos sistemas de transmissão são bastantes pequenas.

Consideremos agora um sistema descrito pela sua função de transferência $H(f)$. A uma entrada sinusoidal de amplitude A_x corresponde uma saída de amplitude $A_y = |H(f)|\,A_x$ sendo as potências normalizadas desses sinais $S_x = A_x^2/2$ e $S_y = A_y^2/2 = |H(f)|^2\,S_x$. A razão das potências normalizadas (S_x e S_y) não é necessáriamente igual à razão das potências *reais* (P_x e P_y) dos sinais da equação 3.35 excepto se o sistema *(real)* tiver a mesma impedância na entrada e na saída. Se fôr este o caso, então

$$g \;=\; |H(f)|^2 \;=\; K^2 \tag{3.40}$$

Se as impedâncias não forem iguais o ganho será proporcional a K^2. O ganho também se aplica a sinais de energia, isto é, $E_y = g\,E_x$. Se o sistema fôr selectivo em frequência a equação 3.40 não é aplicável, no entanto, $|H(f)|^2$ ainda diz como é que o ganho varia em função da frequência. Nestas condições considera-se $|H(f)|^2_{dB}$ como sendo o *ganho relativo* do sistema

$$|H(f)|^2_{dB} \doteq 10\,\log_{10}|H(f)|^2 \tag{3.41}$$

Exercício 3.1
a) Verificar que $P_{dBm} = P_{dBW} + 30$ *dB. (dBW lê-se dB-Watt).*
b) Mostrar que se $|H(f_c)|^2_{dB} = -3$ *dB então* $|H(f_c)| \approx 1/\sqrt{2}$.

3.7.2 Perdas de Transmissão e Repetidores

Todo o meio de transmissão passivo envolve uma perda de potência, em lugar de ganho, dado que $P_s < P_e$. É preferivel, portanto, trabalhar em termos de *perda* ou *atenuação* de transmissão que se designa pela letra L.[3]

$$\begin{aligned} L \doteq \frac{1}{g} &= \frac{P_e}{P_s} \\ L_{dB} = -g_{dB} &= 10\,\log_{10}\frac{P_e}{P_s} \end{aligned} \qquad (3.42)$$

ou seja, $P_s = P_e/L$ e $P_{s_{dBm}} = P_{e_{dBm}} - L_{dB}$. No caso das linhas de transmissão, dos cabos coaxiais e dos guias de onda, a potência de saída decresce exponencialmente com a distância, relação que toma a seguinte forma

$$P_s = 10^{-\frac{\alpha\,d}{10}}\,P_e \qquad (3.43)$$

onde d é a *distância* percorrida pelo sinal entre a entrada e a saída do meio de transmissão e α é o *coeficiente de atenuação*, em dB por unidade de comprimento. Da equação 3.42 resulta então que

$$L = 10^{\frac{\alpha\,d}{10}} \qquad \text{e} \qquad L_{dB} = \alpha\,d \qquad (3.44)$$

o que mostra que a perda em dB é proporcional ao comprimento. A tabela 3.1 lista alguns valores típicos de α para vários meios de transmissão e frequências do sinal. É de notar que os valores da atenuação, quando expressos em dB, obscurecem um pouco a diminuição dramática com a distância que se verifica na potência do sinal, como se pode constatar no seguinte exêmplo.

Exêmplo 3.1
Suponhamos a transmissão de um sinal através de um cabo de 30 Km de comprimento com $\alpha = 3$ *dB/Km. A perda em dB é* $L_{dB} = 3\times 30 = 90$ *dB, logo* $L = 10^9$ *e* $P_s = 10^{-9}\,P_e$. *Duplicando a distância duplica a atenuação*

[3] L de *Loss*, em inglês, que significa *Perda*.

Tabela 3.1: Valores típicos de perdas de transmissão

Meio de transmissão	Frequência		Perda (dB/Km)
Par aberto de fios (0.3 cm $\oslash$)	1	kHz	0.005
Par entrançado de fios (16 AWG)	10	kHz	2
	100	kHz	3
	300	kHz	6
Cabo coaxial (1 cm $\oslash$)	100	kHz	1
	1	MHz	2
	3	MHz	4
Cabo coaxial (15 cm $\oslash$)	100	MHz	1.5
Guia de onda rect$^{\underline{\text{lar}}}$ (5 $\times$ 2.5 cm)	10	GHz	5
Fibra óptica	4×10^{14}	Hz	10

total para 180 dB, de modo que $L = 10^{18}$ *e* $P_s = 10^{-18}\, P_e$. *Esta perda é tão grande que seria necessária uma potência de entrada de um megawatt* (10^6 *W) para obter uma potência de saída de um picowatt* (10^{-12} *W)!*

Grandes atenuações exigem *amplificação* que é feita ao longo do percurso através de *amplificadores repetidores*. A figura 3.11 exemplifica um sistema de transmissão por cabo com um amplificador de saída e um amplificador *repetidor* a cerca do meio do percurso. Dado que numa ligação em cascata os ganhos de potência se multiplicam, tem-se

$$P_s \;=\; (g_1\, g_2\, g_3\, g_4)\, P_e \;=\; \frac{g_2\, g_4}{L_1\, L_3}\, P_e \tag{3.45}$$

que se transforma na equação em dB

$$P_{s_{dBm}} \;=\; (g_{2_{dB}} + g_{4_{dB}}) \;-\; (L_{1_{dB}} + L_{3_{dB}}) \;+\; P_{e_{dBm}} \tag{3.46}$$

Os repetidores são colocados em locais do trajecto por forma a garantir, por um lado, um nível mínimo para a potência do sinal à entrada do amplificador de saída, que este necessita face à potência do ruido presente – valor mínimo esse que é ditado pelas características do amplificador –, e por outro lado, que a potência do sinal em nenhum ponto do cabo ultrapassa um determinado valor limite máximo admissível no cabo, valor este que é ditado pelas suas características eléctricas.

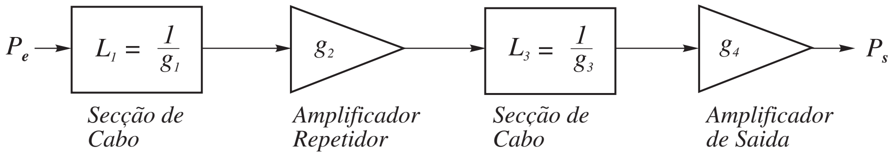


Figura 3.11: Sistema de transmissão por cabo com um amplificador *repetidor*

Exercício 3.2 *Num sistema de transmissão por cabo, de 40 Km de comprimento, a potência de entrada é de* $P_e = 2$ *W, existindo um repetidor de 64 dB de ganho, a 24 Km da entrada. O cabo possui um coeficiente de atenuação* $\alpha = 2.5$ *dB/Km. Utilizar as equações de decibéis para determinar a potência do sinal:*
a) à entrada do repetidor;
b) na saída final.

3.8 Filtros

Qualquer sistema de comunicação inclui um ou mais filtros com o objectivo de separar o sinal portador de informação de contaminações indesejáveis tais como a interferência, o ruído e as distorções.

Como se referiu no início deste capítulo, os filtros são modelados e comportam-se de maneira semelhante aos sistemas de transmissão, diferindo a sua designação apenas pela sua finalidade. O que se disser para os filtros é pois válido para qualquer sistema de transmissão.

3.8.1 Filtros ideais

Por definição, um filtro ideal é caracterizado por fornecer uma transmissão isenta de distorção em uma ou mais bandas de frequência bem determinadas e resposta nula nas restantes frequências. Em particular, a função de transferência de um filtro *passa-banda* ideal é

$$H(f) = \begin{cases} K\, e^{-\jmath 2\pi f t_a} & f_i \leq |f| \leq f_s \\ 0 & |f| > f_s \vee |f| < f_i \end{cases} \tag{3.47}$$

cuja característica de amplitude está representada na figura 3.12. Os parâmetros f_i e f_s são as *frequências de corte*, respectivamente inferior e superior, dado que eles delimitam a *banda passante*. A *largura de banda* do filtro é

$$B_T = f_s - f_i$$

a qual é medida na porção de frequências positivas da banda passante.

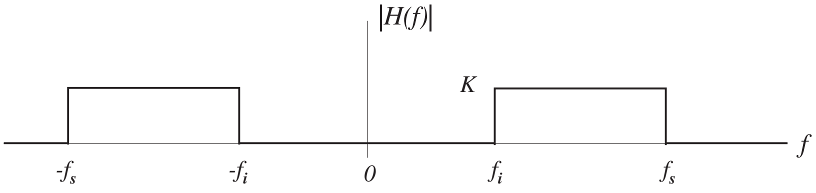


Figura 3.12: Característica de amplitude de um filtro passa-banda ideal

De igual forma, um filtro *passa-baixo* ideal é definido pela equação 3.47 com $f_i = 0$ o qual terá, portanto, $B_T = f_s$. E um filtro *passa-alto* ideal tem $f_i > 0$ e $f_s = \infty$.

Um filtro *rejeita-banda* permite transmissão isenta de distorção a todas as frequências excepto às da *banda de rejeição*, $f_i \leq |f| \leq f_s$, onde se tem $|H(f)| = 0$.

Interessa frizar que os filtros ideais são irrealizáveis, no sentido em que não é possível na prática obter transições abruptas (descontinuidades) da característica nas frequências limites da banda. Os filtros *reais*, portanto, diferem dos ideais nesta zona de transição.

3.8.2 Filtros Reais

A figura 3.13 mostra a característica de amplitude de um filtro passa-banda típico. Comparada com a do filtro ideal da figura 3.12 verifica-se uma banda passante onde $|H(f)|$ tem um valor relativamente elevado, mas não-constante, e bandas de rejeição onde $|H(f)|$ é bastante pequeno mas não nulo. Os pontos limites da banda passante são usualmente definidos por valores f_i e f_s tais que

$$|H(f_i)| = |H(f_s)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H(f)|_{max} = \frac{K}{\sqrt{2}} \tag{3.48}$$

de tal modo que $|H(f)|^2$ nunca seja inferior a $K^2/2$ para $f_i \leq |f| \leq f_s$. A largura de banda, $B_T = |f_s - f_i|$ é então designada de *largura de banda de*

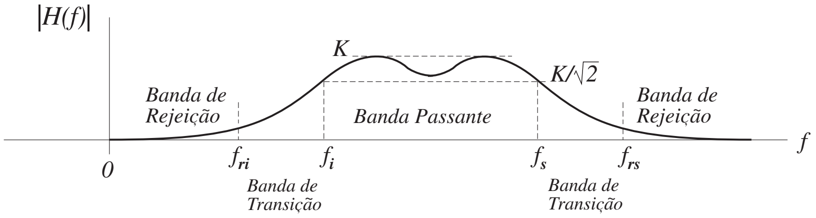


Figura 3.13: Característica de amplitude típica de um filtro passa-banda real

meia potência ou *largura de banda a 3 dB*. A largura da banda passante de um filtro é definida precisamente da mesma maneira que a largura da banda de transmissão a que se aludiu na secção 3.4, onde o sistema de primeira ordem ali exemplificado é um sistema passa-baixo que possui $f_i = 0$ e $f_s = f_c$ por frequências de corte. Por esta razão se está a usar B_T para designar ambas as larguras de banda.

De igual modo os limites das bandas de rejeição são definidos pelas frequências f_{ri} e f_{rs} a partir das quais $|H(f)|^2$ se mantém consistentemente abaixo de 10 % do seu valor máximo.

Entre a banda passante e as bandas de rejeição existem as *bandas de transição*, ou *bandas de corte*, onde se pode considerar que o filtro (ou o sistema de transmissão) nem deixa passar nem rejeita as correspondentes componentes de frequência do sinal. Estas bandas são definidas pelas frequências de corte, $f_c = \{f_i, f_s\}$, e de rejeição, $f_r = \{f_{ri}, f_{rs}\}$.

Assim, uma filtragem (ou transmissão) efectiva do sinal depende da existência de filtros com bandas de transição muito estreitas. Tais filtros (ou sistemas) são de ordem superior (ao de primeira ordem referido na secção 3.5). Faremos referência a uma classe conhecida por filtros (ou sistemas) de *Butterworth* de ordem-n.

O filtro de *Butterworth* de ordem-n é constituido por n elementos reactivos (condensadores e indutores). A sua característica de amplitude com $K = 1$ é da forma

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{B_T}\right)^{2n}}} \tag{3.49}$$

Um filtro de Butterworth de primeira ordem ($n = 1$) possui a mesma característica do filtro passa-baixo RC exemplificado na figura 3.3 o qual constituiria uma fraca aproximação ao filtro ideal passa-baixo. Mas a aproximação melhora se se aumentar o valor de n por adição de mais elementos ao circuito (ver Problema 3.4). A figura 3.14 mostra algumas características de potência para vários valores de n.

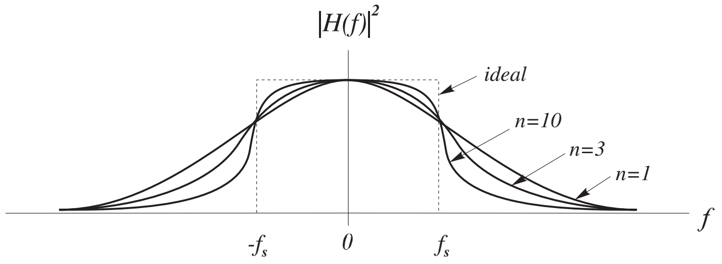


Figura 3.14: Características de filtros de Butterworth

Tendo o limite da banda de rejeição sido definido pelas frequências f_r tais que $|H(f_r)|^2 = -10$ dB, a largura da banda de transição, quando $n = 1$, é de $3\,B_T - B_T = 2\,B_T$, mas quando $n = 10$, ela tem somente o valor de $1.12\,B_T - B_T = 0.12\,B_T$. Claramente se verifica que $|H(f)|^2$ se aproxima da característica quadrada ideal, no limite, quando $n \to \infty$.

3.9 Análise com diagramas de blocos

Um sistema de comunicação é normalmente constituido por vários sub-sistemas componentes. Cada sub-sistema (LIT) possuirá uma função de transferência e a função de transferência do sistema total será uma composição destas. A tabela 3.2 mostra algumas funções de transferência *primitivas* que se podem deduzir aplicando a definição da transformada referida no capítulo 2. Sempre que os sub-sistemas em questão sejam

Tabela 3.2: Funções de Transferência de algumas operações temporais

Operação no domínio do tempo		F de Transferência
Multiplicação por Escalar	$y(t) = \pm K\,x(t)$	$H(f) = \pm K$
Diferenciação	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$H(f) = \jmath\,2\pi f$
Integração	$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda$	$H(f) = \frac{1}{\jmath\,2\pi f}$
Atraso no Tempo	$y(t) = x(t - t_a)$	$H(f) = e^{-\jmath\,2\pi f t_a}$

descritos por funções de transferência individuais é possível e desejável obter a função de transferência do sistema global por composição daquelas. A figura 3.15 mostra as formas básicas de composição de sub-sistemas designadamente as composições paralela, em cascata e realimentada. As configurações mais complicadas podem ser analisadas por aplicação sucessiva destas regras elementares. É, no entanto, essêncial, que nas funções de transferência dos sub-sistemas se tenham em consideração quaisquer interacções ou efeitos de *carga* (eléctrica) entre eles de modo a representarem o comportamento do sub-sistema no contexto do sistema total. É fácil de concluir que as regras de composição se traduzem nas seguintes relações

$$
\begin{aligned}
H(f) &= H_1(f) + H_2(f) && \text{Ligação em Paralelo} \\
H(f) &= H_1(f) \cdot H_2(f) && \text{Ligação em Cascata} \\
H(f) &= \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f) \cdot H_2(f)} && \text{Ligação Realimentada}
\end{aligned}
$$

Este último caso é mais propriamente designado por realimentação *negativa* em contraste com a realimentação positiva na qual o sinal de saída é adicionado ao de entrada.

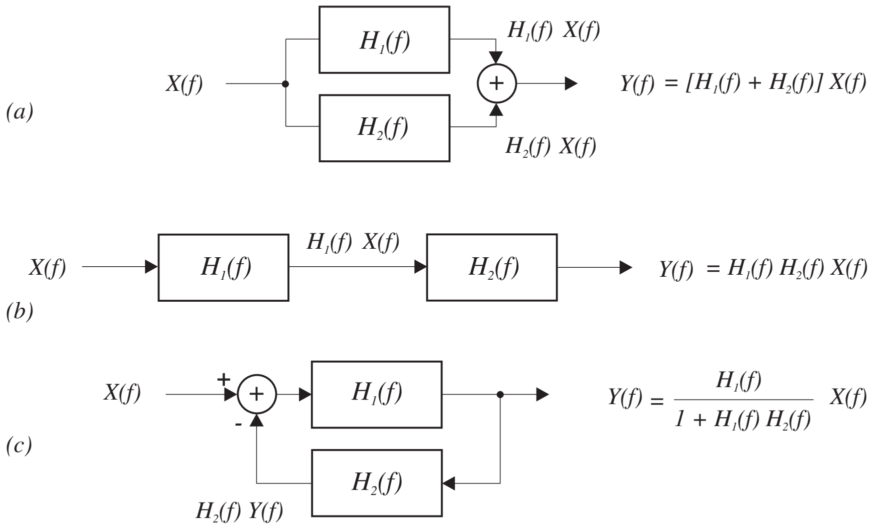


Figura 3.15: Composição: *(a)* Paralela; *(b)* em cascata; *(c)* realimentada

3.10 Domínio do tempo e domínio da frequência

A descrição de um sistema no domínio da frequência, feita pela sua função de transferência $H(f)$, é útil quando se pretende investigar as propriedades espectrais do sistema (banda de funcionamento, largura de banda, selectividade em frequência, etc) e bem assim as propriedades espectrais dos sinais resposta.

Neste domínio a relação entrada-saída é muito simples. É a relação multiplicativa da equação 3.12:

$$Y(f) \;=\; H(f) \;\cdot\; X(f)$$

Interessa trabalhar ou obter a resposta no domínio do tempo quando se pretende visualizar a *forma* dos sinais. No domínio do tempo esta relação é, como vimos, uma equação diferencial. Mas, se quizermos expressar os sinais resposta através de uma relação entre o sinal de entrada e uma característica do sistema como funções do tempo, de forma semelhante à relação 3.12 do domínio da frequência, ter-se-ia de determinar a função $h(t)$ que é a transformada inversa de $H(f)$, isto é, $h(t) \leftrightarrow H(f)$ e assim

$$y(t) \;=\; h(t) \;*\; x(t)$$

em que a relação $*$ não é uma multiplicação mas é agora uma *convolução*, uma relação integral do produto de $x(t)$ por $h(t)$ definida por

$$h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, x(t-\alpha)\, d\alpha$$

Em geral é mais difícil trabalhar no domínio do tempo podendo-se chegar à *forma* das respostas neste domínio através do domínio da frequência calculando depois $y(t)$ por transformação inversa de $Y(f)$.

3.11 Problemas

3.1 – Considere um sistema de transmissão possuindo uma função de transferência, $H(f)$, dada por

$$H(f) \;=\; \frac{5}{1 + j(\frac{f}{4\times 10^3})^2}$$

a) Classifique o sistema e represente graficamente a sua característica de amplitude.

b) Determine a largura de banda do sistema e a largura da banda de corte.

c) Considerando o sistema ideal com a largura de banda calculada em b), determine o ritmo máximo de símbolos, r_s, que o sistema admite.

3.2 – Considere um filtro RC passa-baixo de primeira ordem com função de transferência $H(f)$

$$H(f) = \frac{1}{1 + j(\frac{f}{B_T})}$$

em que $R = 100$ KΩ e $C = 200$ pF.

a) Calcule a atenuação, em *decibéis*, das componentes de frequência fundamental e da primeira harmónica não nula do sinal rectangular polar periódico NRZ ao ritmo de 8000 *dig bin/s* ao passar este filtro.

b) Qual a potência, em *dBm* e em *Watt*, da componente fundamental à saida, se à entrada ela é de -12 *dBm*?

3.3 – Considere um sistema de comunicação digital cuja função de transferência $H(f)$ é razoavelmente aproximada por

$$H(f) \;=\; \frac{3.75 \times 10^3}{3.75 \times 10^3 \;-\; j\,9 \times 10^4 \;+\; jf}$$

a) Esquematize a característica de amplitude do sistema e classifique-o.

b) Determine a largura de banda de transmissão do sistema se esta fôr definida a $\frac{1}{5}$ da potência.

c) Suponha agora que este sistema possui uma característica ideal com largura de banda igual à calculada em *b)*. Esboce uma forma de onda para o sinal a ser transmitido através deste sistema correspondente à sequência de dígitos binários **101001**, ao ritmo máximo teórico.

3.4 – O circuito da figura 3.16 é uma realização de um filtro de Butterworth passa-baixo de segunda ordem com largura de banda $B_T = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Determinar uma expressão para $H(f)$ e obter a relação entre R, L e C.

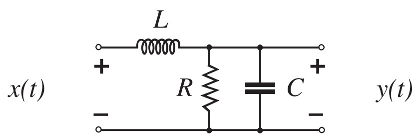


Figura 3.16: Filtro Butterworth de segunda ordem

3.5 – Calcular o valor mínimo da ordem n de um filtro de Butterworth, e $|H(2B_T)|^2$ em dB para esse filtro, tal que $|H(f)|^2 \geq -1$ dB

a) para $|f| < 0.8\,B_T$

b) para $|f| < 0.9\,B_T$

3.6 – Considere que $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ no circuito da figura 3.16.

a) Mostre que

$$|H(f)|^2 = \left[1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^4\right]^{-1}$$

em que $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

b) Determine a largura de banda a 3 dB em função de f_0. Esquematize $|H(f)|$ e compare com a característica de um sistema de Butterworth de 2ª ordem.

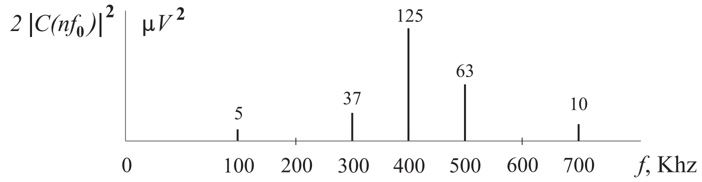
3.7 – Considere que no sistema com repetidores da figura 3.11 se tem $P_e = 0.5$ W, $\alpha = 2$ dB/Km e um comprimento total do percurso de 40 Km. Determine os ganhos dos amplificadores e a localização do repetidor de modo que $P_s = 100$ mW e que a potência do sinal à entrada de cada amplificador seja de 20 μW.

3.8 – Resolva o problema 3.7 com $P_e = 50$ mW e $P_s = 0.2$ W.

3.9 – Um sistema com repetidores, de 400 Km, consiste em m secções de cabo idênticas com $\alpha = 0.4$ dB/Km e m amplificadores idênticos com um ganho máximo de 30 dB. Determine o número de secções necessárias bem como o ganho por cada amplificador por forma a que se tenha $P_s = 50$ mW quando $P_e = 2$ W.

3.10 – Um sistema com repetidores, de 3000 Km, consiste em m secções de cabo idênticas com $\alpha = 0.6$ dB/Km e m amplificadores idênticos. Determine o número de secções necessárias e o ganho por amplificador por forma a que $P_s = P_e = 100$ mW e a que a potência de entrada em cada amplificador seja de pelo menos 25 μW.

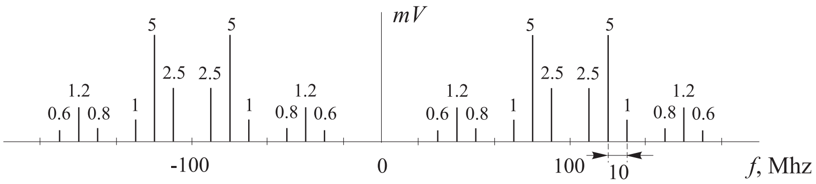
3.11 – Um sinal digital modulado em amplitude (ASK) com potência total normalizada de 250 μV^2, possui uma densidade espectral unilateral indicada na figura. Pretende-se transmitir esse sinal a 300 Km através de um cabo coaxial de 50 Ω possuindo coeficiente de atenuação $\alpha = 0.7$ dB/Km na banda $B_T = [200, 600$ KHz$]$ recorrendo, se necessário, a um ou mais amplificadores-repetidores iguais com ganho máximo de 50 dB cada. A potência mínima exigida no receptor é de -65 dBm.



a) Qual a banda, a 90% da potência, ocupada pelo sinal e a respectiva largura.
b) Determine a potência do sinal à entrada do cabo (dentro da banda de transmissão deste).
c) Verifique se são necessários repetidores e, em caso afirmativo, determine o número mínimo a utilizar, as distâncias a que devem ser colocados e os respectivos ganhos.

(Solução: a) $B = [200, 600\ KHz]$, $|B| = 400\ KHz$ b) $P_e \approx -23\ dB_m$ (porque $P_e = S/Z$) c) $m = 4$, $d = 75$ Km ou $m = 4$, $d = 60$ Km e $42 \leq g_a \leq 50$ dB)

3.12 – Um sinal digital modula em amplitude uma onda contínua de frequência $f_p = 100$ MHz, para transmissão em ASK. O sinal modulado possui o espectro de amplitude representado na figura e uma potência média total de 140 μW e é transmitido numa linha ideal de 10 Km de comprimento. A linha possui banda de transmissão coincidente com a banda do sinal e coeficiente de atenuação $\alpha = 2.5$ dB/Km.



a) Determine a largura de banda, B, do sinal modulado.

b) Represente graficamente a característica de potência da linha (amplitude quadrada da função de transferência) indicando a sua banda de passagem e ganho.

c) O receptor no fim da linha exige que a potência do sinal à sua entrada não seja inferior a -12 dB$_{mV^2}$. Indique se deve haver amplificação de linha e, em caso afirmativo, qual o ganho mínimo do amplificador.

(Solução: a) $B = [70, 130$ MHz$]$, $|B| = 60$ MHz   b) rectangular entre 70 e 130 MHz e $g = |H(f)|^2_{dB} = -25$ dB ou $|H(f)|^2 \approx 3.2 \times 10^{-3}$ c) 1 amplificador com $g_a \geq 22$ dB)

3.13 – Determine e esquematize a resposta a uma sequência de pulsos rectangulares do filtro passa-alto (FPA) de primeira ordem modelado pelo circuito RC da figura 3.17.

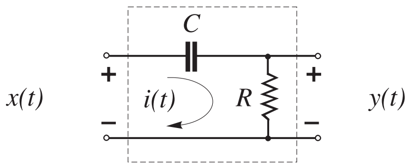


Figura 3.17: Modelo eléctrico de um sistema PA de primeira ordem

fim do capítulo 3