Capítulo 2

Análise de Sinais

Os sinais de comunicação eléctricos são quantidades variáveis no tempo, voltagens ou correntes. Embora costumem, como grandeza física que são, ser representados por funções no domínio do tempo, são também susceptíveis de representação no *domínio da frequência* no qual podem ser considerados como uma sobreposição de componentes sinusoidais de várias frequências, amplitudes e fases. Esta descrição do sinal no domínio da frequência é designada de *espectro* do sinal.

A análise espectral de sinais utiliza as séries e as transformadas de Fourier da análise matemática, formalismos que constituem uma das ferramentas fundamentais da engenharia de telecomunicações. Estes formalismos permitem tratar grandes classes de sinais que possuam propriedades semelhantes no domínio da frequência independentemente dos detalhes que os distingam no domínio do tempo. A representação dos sinais do ponto de vista espectral torna-se muito mais sugestiva ao estudar-se a sua interação com os sistemas de transmissão os quais podem ser caracterizados por uma função de transferência, também definida como uma função da frequência.

Este capítulo debruça-se sobre a análise espectral dos sinais e dedica uma atenção especial à interpretação das suas propriedades no domínio da frequência. Examina os *espectros de linhas* baseados no desenvolvimento em série de Fourier dos sinais periódicos e os *espectros contínuos* baseados na transformada de Fourier dos sinais não-periódicos.

2.1 Sinais periódicos: Espectros de Linhas

O domínio da frequência vai ser introduzido e interpretado em termos de fasores rotativos. Começa-se por definir o espectro de linhas de um sinal sinusoidal. É depois obtido o espectro de um sinal periódico qualquer, de potência média finita, a partir da sua representação em série de Fourier.

2.1.1 Fasores e Espectros de Linhas

Consideremos a forma de onda sinusoidal $v(t)$ representada na figura 2.1. Por convenção, representam-se as sinusoides por funções cosseno, isto é,

$$v(t) = A\ \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{2.1}$$

onde A é o valor de pico ou amplitude, ω_0 é a frequência angular, em radianos por segundo, e ϕ o ângulo de fase. Este ângulo tem a ver com o instante escolhido para origem dos tempos e representa o facto do valor máximo estar desviado dessa origem de um valor $t = -\phi/\omega_0$. A equação 2.1 significa que $v(t)$ se repete indefinidamente com um *período* de repetição $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

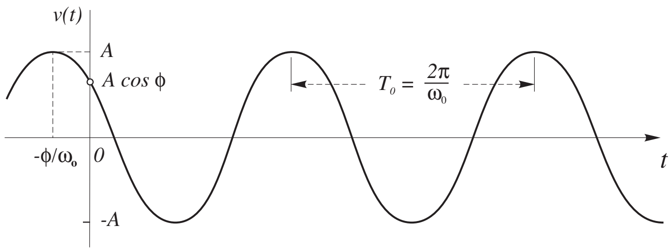

Figura 2.1: Forma de onda sinusoidal

O inverso do período é a frequência cíclica

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{2.2}$$

medida em ciclos por segundo, ou Hertz (Hz). Evidentemente que nenhum sinal real existe indefinidamente mas a equação 2.1 constitui um *modelo* razoável para uma forma de onda sinusoidal com uma duração muito maior do que o seu período. Tal como em análise da corrente alterna estacionária, a sinusoide pode ser representada no plano complexo por uma exponencial ou *fasor*. Esta representação baseia-se no teorema de Euler segundo o qual

$$e^{\pm \jmath\theta} \; = \; \cos\theta \pm \jmath \sin\theta \tag{2.3}$$

em que $\jmath = \sqrt{-1}$ e θ é um ângulo arbitrário. Fazendo $\theta = \omega_0 t + \phi$ pode representar-se qualquer sinusoide como sendo a parte real de uma exponencial complexa

$$A\,\cos(\omega_0 t + \phi) = A\,\Re\left[e^{\jmath(\omega_0 t + \phi)}\right] = \Re\left[A\,e^{\jmath\omega_0 t}\cdot e^{\jmath\phi}\right] \tag{2.4}$$

designada de *representação por fasor* porque o termo dentro do parêntisis recto pode ser considerado como um vector rotativo no plano complexo, conforme mostra a figura 2.2.

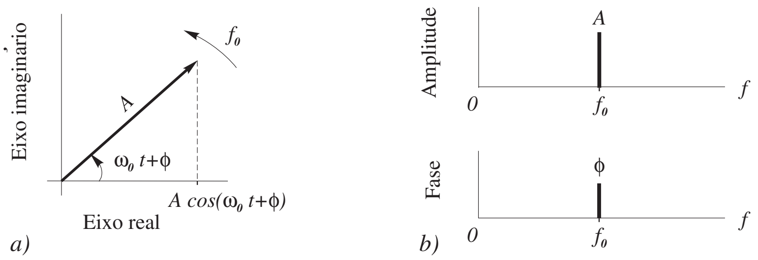

Figura 2.2: Representação de sinusoide por um fasor

O fasor tem comprimento A, roda em sentido retrógrado a f_0 rotações por segundo e no instante t_0 faz um ângulo de ϕ radianos com o eixo real positivo. A projecção do fasor no eixo real reproduz a sinusoide da equação 2.4. O fasor fica completamente definido por três parâmetros: a amplitude, o ângulo de fase e a frequência de rotação.

Para descrever o mesmo fasor no *domínio da frequência* torna-se necessário associar a amplitude e a fase à frequência. Assim, uma descrição conveniente no domínio da frequência será o *espectro de linha* da figura 2.2(b), o qual consiste em dois gráficos: o da amplitude em função da frequência e o da fase em função da frequência. Embora esta representação seja simples e pareça trivial, possui grande valor conceptual quando aplicada a sinais mais complexos. Na representação espectral adoptaremos as seguintes convenções:

(i) A variável independente é a *frequência*, f em Hz. A frequência angular ω, em radianos/seg, é uma notação sintética para o valor $2\pi f$

(ii) Os ângulos de fase são medidos relativamente a funções *cosseno.* Os senos serão convertidos a cosseno através da identidade $\sin \omega t = \cos(\omega t - 90°)$

(iii) A amplitude é sempre uma quantidade *positiva.* Quando aparecerem sinais com amplitude negativa, esta será absorvida na fase, isto é, $-A \cos(\omega t) = A \cos(\omega t \pm 180°)$

(iv) Os ângulos de fase são expressos em *graus* embora ângulos tais como ωt sejam inerentemente em radianos.

A figura 2.3 ilustra estas convenções. Os gráficos da figura 2.3(b), chamados *espectros de linhas unilaterais*, podem ser construidos para qualquer combinação linear de sinusoides.

Uma outra representação espectral ainda mais valiosa, embora envolva frequências negativas, é o *espectro de linhas bilateral.* Esta representação decorre da equação 2.4, tendo em atenção que $\Re[z] = 1/2\,(z + z^*)$ e fazendo $z = A\, e^{\jmath 2\pi f_0 t} \cdot e^{\jmath\phi}$ e $z^* = A\, e^{-\jmath 2\pi f_0 t} \cdot e^{-\jmath\phi}$ tem-se

$$A\, \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2}\, e^{\jmath 2\pi f_0 t} \cdot e^{\jmath\phi} + \frac{A}{2}\, e^{-\jmath 2\pi f_0 t} \cdot e^{-\jmath\phi} \tag{2.5}$$

O lado direito da identidade 2.5 representa um par de fasores conjugados representados na figura 2.4 juntamente com o respectivo espectro de linhas. Os fasores têm amplitudes iguais e giram em sentidos opostos à mesma frequência f_0. O fasor-soma situa-se sempre no eixo real e a sua amplitude é igual a $A\, \cos(2\pi f_0 t + \phi)$. O espectro de amplitude tem simetria par enquanto que o espectro de fase tem simetria impar pois os fasores são conjugados.

Deve notar-se que os espectros de linhas, tanto o unilateral como o bilateral, constituem tão-sómente representações pictóricas de sinusoides ou fasores funções do tempo. A figura 2.5 é a versão bilateral do espectro da figura 2.3.

Uma linha no espectro unilateral representa uma onda cosseno real, enquanto que uma linha no espectro bilateral representa uma exponencial complexa, donde, para se obter uma onda cosseno real, se deve adicionar o termo conjugado. Assim, sempre que se fizer referência a um intervalo de

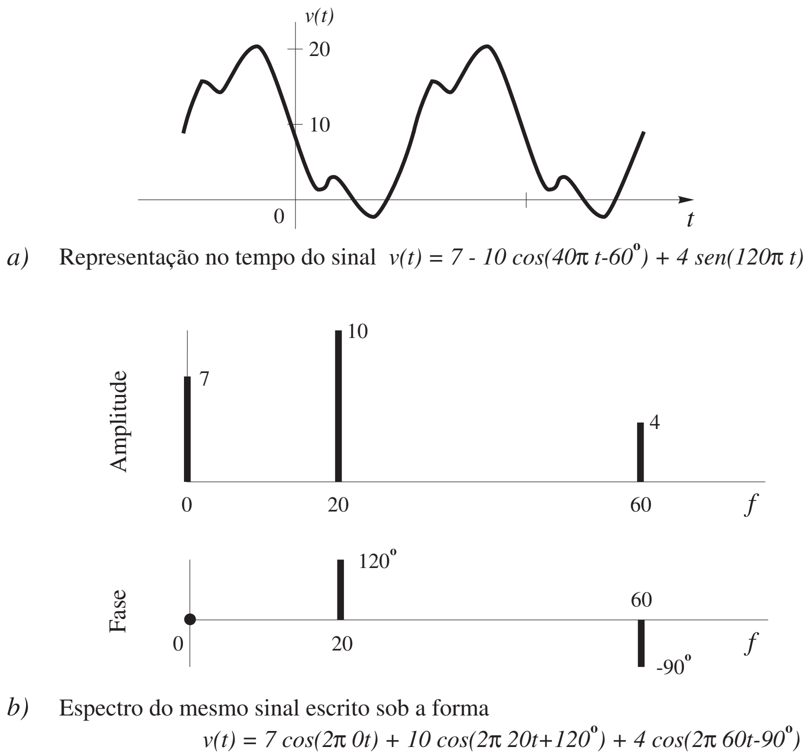

Figura 2.3: Representação de um sinal periódico e seu espectro de linhas

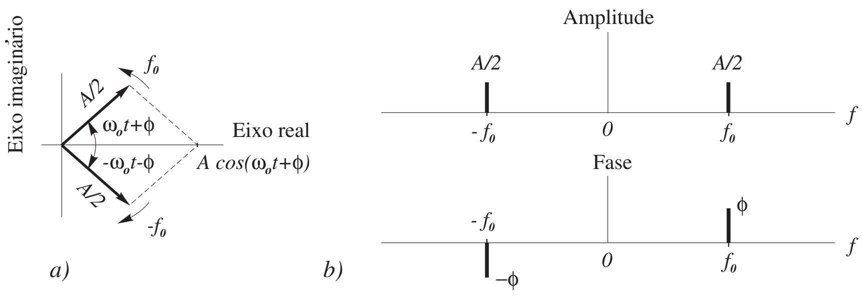

Figura 2.4: (a) Fasores conjugados; (b) Espectro de linhas bilateral

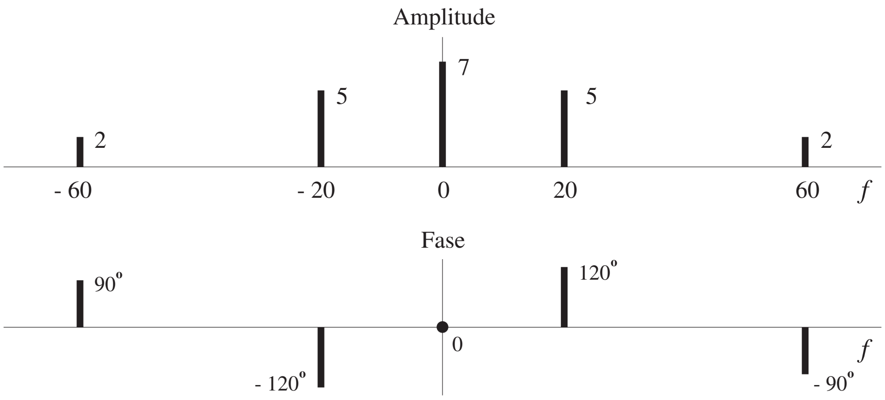

Figura 2.5: Versão bilateral do espectro da figura 2.4

frequência $[f_1, f_2]$ num espectro bilateral, está implícitamente nele contido o correspondente intervalo de frequências negativas, isto é, o intervalo é definido por $f_1 \leq |f| \leq f_2$.

Finalmente interessa notar que o espectro de amplitude, em qualquer das versões, fornece mais informação sobre o sinal do que o espectro de fase. Ambas as partes do espectro (amplitude e fase), porém, são necessárias à definição da função no domínio do tempo mas o espectro de amplitude, só por si, indica quais as frequências presentes no sinal e em que proporção. Por outras palavras, o espectro de amplitude *mostra* o *conteúdo em frequências* de um sinal.

2.1.2 Sinais Periódicos e Potência Média

As sinusoides e os fasores pertencem à classe dos *sinais periódicos*, isto é, os sinais que permanecem inalterados perante uma translação temporal de T_0 seg:

$$v(t \pm mT_0) = v(t) \qquad - \infty < t < \infty$$

em que T_0 é o período do sinal. O sinal fica portanto completamente definido pelos valores que toma num qualquer intervalo de amplitude T_0.

Definamos agora alguns valores médios referentes a um sinal genérico $v(t)$.

O *valor médio* de $v(t)$ ao longo de todo o tempo é definido por

$$\langle v(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} v(t)\, dt \tag{2.6}$$

O integral dá a área sob a curva $v(t)$ num qualquer intervalo de duração T segundos que dividido por T dá o valor médio nesse intervalo. Fazendo o intervalo aumentar indefinidamente, $T \to \infty$, obtem-se o valor médio em todo o tempo. No caso de um sinal periódico, o valor médio para todo o tempo é igual ao valor médio num período

$$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} v(t)\, dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t)\, dt \tag{2.7}$$

onde $\int_{T_0}$ designa o integral calculado num intervalo qualquer de amplitude igual a um período.

Suponhamos que $v(t)$ é a voltagem aos terminais de uma resistência de valor R Ohms. O sinal $v(t)$ dará origem a uma corrente eléctrica $i(t) = \frac{v(t)}{R}$. Pode-se então calcular a potência média dissipada na resistência calculando o valor médio da potência instantânea $s_v(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{v^2(t)}{R}$. Na realidade, por vezes, não se sabe se um sinal é uma tensão ou uma corrente. Por isso se convenciona *normalizar* a potência supondo que $R = 1\,\Omega$. Nestas condições, define-se *potência média*, S, associada a um sinal periódico arbitrário pela expressão

$$S = \langle |v(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t)|^2\, dt \tag{2.8}$$

O valor de S será real e não-negativo. Quando o integral 2.8 existir e fôr limitado, isto é, se fôr $0 < S < \infty$, $v(t)$ é designado de sinal periódico *de potência*.

2.1.3 Série de Fourier

O sinal $v(t)$ da figura 2.3 foi obtido a partir da soma de uma parcela constante e de duas sinusoides. Indo agora em sentido contrário, procuremos decompôr os sinais periódicos em somas sinusoidais. A expansão de uma função em série exponêncial de Fourier permite efectuar esta decomposição.

Seja $v(t)$ um sinal de potência de período $T_0 = \frac{1}{f_0}$. O seu desenvolvimento em série exponêncial de Fourier é da forma

$$v(t) \; = \; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, e^{\jmath 2\pi n f_0 t} \qquad n \; = \; 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{2.9}$$

em que os coeficientes C_n da série são dados por

$$C_n \; = \; \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \, e^{-\jmath 2\pi n f_0 t} \, dt \tag{2.10}$$

isto é, C_n é o valor médio do produto $v(t) \cdot e^{-\jmath 2\pi n f_0 t}$. Dado que, em geral, os coeficientes são números complexos, podem ser expressos na forma polar $C_n = |C_n| \, e^{\jmath \arg C_n}$ onde $\arg C_n$ é o ângulo do complexo C_n. A equação 2.9 desenvolve um sinal periódico de potência numa soma infinita de fasores em que a n-ésima parcela é dada por

$$C_n \, e^{\jmath 2\pi n f_0 t} \; = \; |C_n| \cdot e^{\jmath 2\pi n f_0 t} \cdot e^{\jmath \arg C_n}$$

A série existe e converge uniformemente se o sinal periódico $v(t)$ tiver um número finito de máximos, mínimos e descontinuidades por período e se $v(t)$ fôr absolutamente integrável possuindo área finita por período. Estas condições[1] são suficientes mas não estritamente necessárias. Uma condição alternativa é que $v(t)$ possua *quadrado somável* de forma que $|v(t)|^2$ tenha área finita por período, o que equivale a um sinal de potência. Pode dizer-se que todos os sinais com interesse que ocorrem na prática obedecem a estas condições.

O sinal $v(t)$ na equação 2.9 consiste numa soma de fasores de amplitude $|C_n|$ e ângulo $\arg C_n$ com frequências $nf_0 = 0, \pm f_0, \pm 2f_0, \cdots$ portanto a sua representação gráfica no domínio da frequência consiste num espectro de linhas bilateral definido pelos coeficientes da série. Para reforçar esta interpretação espectral também se escreve

$$C(nf_0) \equiv C_n$$

pelo que $|C(nf_0)|$ representará o *espectro de amplitude* como uma função de f e $\arg C(nf_0)$ representará o *espectro de fase*. Interessa realçar três propriedades importantes dos espectros dos sinais de potência:

[1] condições de Dirichlet

(i) Todas as frequências são multiplas inteiras, *harmónicas*, da *frequência fundamental*, $f_0 = \frac{1}{T_0}$. Assim, as linhas espectrais estão uniformemente espaçadas de um valor igual a f_0

(ii) A componente constante é igual ao *valor médio* do sinal, dado que para $n = 0$, a equação 2.10 dá

$$C_0 \;=\; \frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)\,dt \;=\; \langle v(t)\rangle \tag{2.11}$$

(iii) Se o sinal $v(t)$ fôr real, então

$$C_{-n} \;=\; C_n^* \;=\; |C_n|\,e^{-\jmath \arg C_n} \tag{2.12}$$

o que se deduz a partir da equação 2.10 substituindo n por $-n$. Assim, tem-se $|C(-nf_0)| = |C(nf_0)|$ e $\arg C(-nf_0) = -\arg C(nf_0)$ o que significa que o espectro de amplitude tem simetria par (é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas) e o espectro de fase tem simetria impar (é simétrico em relação à origem dos eixos).

Para sinais reais, a terceira propriedade permite reagrupar a série exponencial em *pares conjugados* excluindo a parcela C_0. A equação 2.9 toma então a forma

$$v(t) \;=\; C_0 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} |2C_n|\,\cos(2\pi n f_0 t + \arg C_n) \tag{2.13}$$

que se designa por *série trigonométrica de Fourier* sugerindo um espectro sob a forma unilateral. É usual, porém, utilizar-se a série exponencial e o espectro bilateral.

Antes de considerarmos o exêmplo na secção que se segue, interessa introduzir uma função que aparece frequêntemente. O cálculo de C_n (2.10) envolve muitas vezes o cálculo do valor médio de um fasor, isto é, o integral

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{\jmath 2\pi f t}\,dt \;=\; \frac{1}{\jmath 2\pi f T}\left(e^{\jmath\pi f T} - e^{-\jmath\pi f T}\right) \;=\; \frac{1}{\pi f t}\,\sin(\pi f T) \tag{2.14}$$

dá uma função do tipo $\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$ que passaremos a designar por $\mathrm{sinc}(\alpha)$, isto é,

$$\mathrm{sinc}(\alpha) \equiv \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} \tag{2.15}$$

onde α é a variável independente. A figura 2.6 representa gráficamente esta função cujo máximo absoluto ocorre em $\alpha = 0$ e tem zeros em todos os valores inteiros de α

$$\mathrm{sinc}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

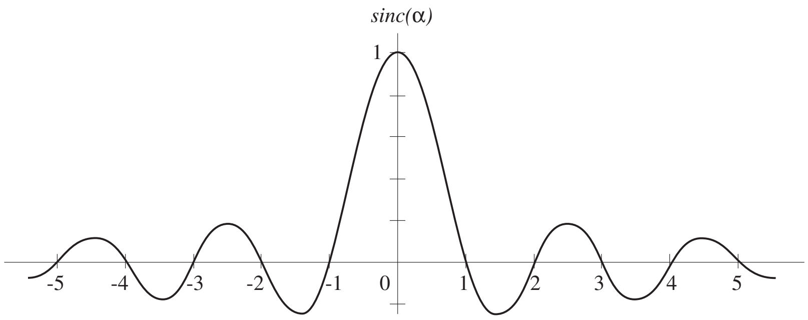

Figura 2.6: Representação da função $\mathrm{sinc}(\alpha)$

2.1.4 Sequência de pulsos rectangulares

Consideremos a sequência de pulsos rectangulares da figura 2.7. Cada pulso tem amplitude A e duração τ. Existem descontinuidades nos extremos de cada pulso, $t = nT_0 \pm \tau/2$, portanto os valores de $v(t)$ são indefinidos nesses pontos de descontinuidade. Este facto realça a diferença

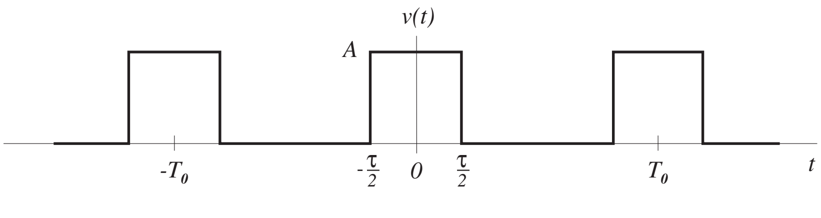

Figura 2.7: Sequência de pulsos rectangulares

entre um sinal com existência física e o correspondente modelo matemático, visto que o primeiro nunca apresenta transições instantâneas. Contudo, o modelo é razoável se os tempos de transição forem muito pequenos quando comparados com a duração dos pulsos.

Para calcular os coeficientes de Fourier, tomemos como limites de integração na equação 2.10 os limites do período central $t \in [-\frac{T_0}{2}, +\frac{T_0}{2}]$. Obtém-se sucessivamente

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t)\, e^{-\jmath 2\pi n f_0 t} dt \\
C_n &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A\, e^{-\jmath 2\pi n f_0 t} dt \\
C_n &= \frac{A}{-\jmath 2\pi n f_0 T_0}\left(e^{-\jmath\pi n f_0 \tau} - e^{+\jmath\pi n f_0 \tau}\right) \\
C_n &= A f_0 \frac{\sin(\pi n f_0 \tau)}{\pi n f_0}
\end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo por τ dá finalmente

$$C_n = A f_0 \tau \,\mathrm{sinc}(n f_0 \tau)$$

o que decorre imediatamente da definição 2.15 com $\alpha = n f_0 \tau$.

A figura 2.8 mostra o espectro de amplitude obtido a partir de $|C(nf_0)| = Af_0\tau\,|\mathrm{sinc}(nf_0\tau)|$ e para o caso em que $\frac{\tau}{T_0} = f_0\tau = \frac{1}{4}$. As linhas espectrais situadas nos múltiplos inteiros de f_0 têm uma amplitude definida

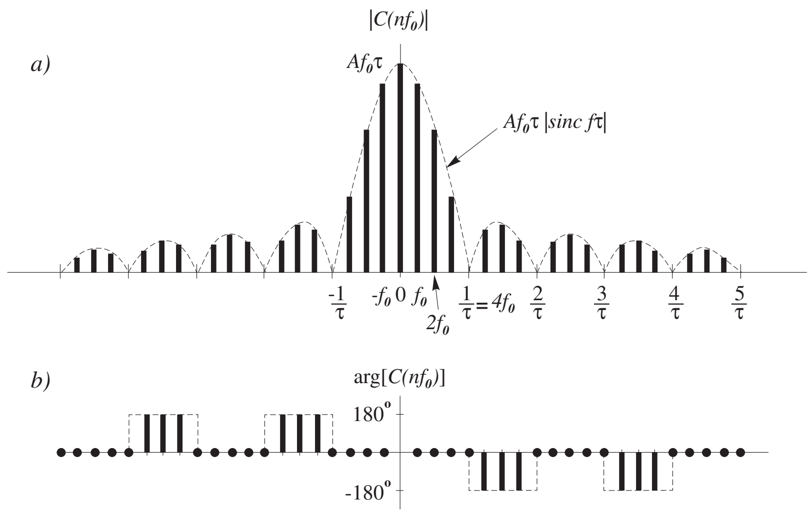

Figura 2.8: Espectro da sequência de pulsos rectangulares com $f_0\tau = 1/4$

pela função sinc, isto é, a "envolvente" das amplitudes é a função sinc que aparece a tracejado na figura 2.8. As linhas espectrais em $\pm 4f_0$, $\pm 8f_0$, etc, não existem dado que se situam precisamente sobre os múltiplos de $\frac{1}{\tau}$ onde a envolvente é nula. A componente constante tem amplitude $C(0) = \frac{A\tau}{T_0}$, valor que poderia ser obtido pelo cálculo do valor médio de $v(t)$, figura 2.7.

O espectro de fase na figura 2.8(b) obtem-se observando que C_n é sempre real mas por vezes negativo. Portanto $\arg C(nf_0)$ toma os valores $0°$ e $\pm 180°$ dependendo do sinal de $\operatorname{sinc}(nf_0\tau)$.

A sequência de pulsos rectangulares está pois decomposta nas suas componentes de frequência. Consideremos agora a operação inversa, isto é, a construção da sequência de pulsos a partir das sinusoides. Para tal escrevemos a série trigonométrica da equação 2.13 com $\frac{\tau}{T_0} = f_0\tau = \frac{1}{4}$ e portanto com $C(0) = \frac{A}{4}$ e $|2\,C_n| = \frac{2A}{4}\left|\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{4}\right)\right| = \frac{2A}{n\pi}\left|\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right|$. Vem

$$v(t) = \frac{A}{4} + \frac{\sqrt{2}\,A}{\pi}\cos(2\pi f_0 t) + \frac{A}{\pi}\cos(4\pi f_0 t) + \frac{\sqrt{2}\,A}{3\pi}\cos(6\pi f_0 t) + \cdots$$

Somando as parcelas até à terceira harmónica dá a aproximação de $v(t)$ esquematizada na figura 2.9. Grosso modo, esta aproximação assemelha-se à sequência de pulsos, mas faltam-lhe as transições bruscas nos "cantos" dos rectângulos. Se se desejar uma melhor aproximação podem-se tomar mais harmónicas, por exêmplo, até à 7ª, que é o caso da figura 2.9(b).

De notar que as harmónicas de ordem superior e de menor amplitude servem principalmente para aguçar os cantos da onda rectangular. Deve-se notar também que a série converge para o ponto médio de amplitude $\frac{A}{2}$ em $t = \pm\frac{\tau}{2}$ onde $v(t)$ tem as descontinuidades.

Exercício 2.1 *Esquematizar o espectro de amplitude de uma sequência de pulsos rectangulares para cada um dos seguintes casos:*

$$\tau = \frac{T_0}{5} \qquad \tau = \frac{T_0}{2} \qquad \tau = T_0$$

No último caso a sequência de pulsos degenera numa constante ao longo do tempo. Como é que este facto transparece no espectro?

2.1.5 Teorema da Potência

Este teorema relaciona a potência média S de um sinal periódico com os seus coeficientes de Fourier.

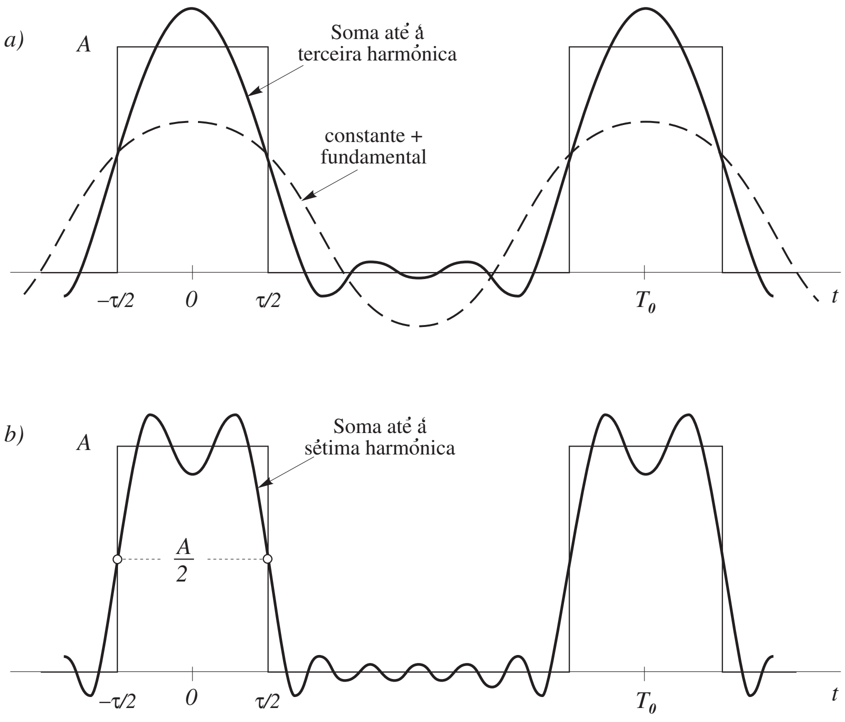

Figura 2.9: Reconstrução por série de Fourier de uma sequência de pulsos

Se se admitir que $v(t)$ é uma função complexa – o caso mais geral – pode escrever-se

$$|v(t)|^2 \;=\; v(t)\cdot v^*(t)$$

onde $v^*(t)$ é o complexo conjugado de $v(t)$. A potência média de $v(t)$ é

$$S \;=\; \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |v(t)|^2\,dt \quad\Leftrightarrow\quad S \;=\; \frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)\cdot v^*(t)\,dt$$

Substituindo $v^*(t)$ pela sua série exponencial vem,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^*\,e^{-\jmath 2\pi n f_0 t}\right] dt \\ S &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)\,e^{-\jmath 2\pi n f_0 t}\,dt\right] C_n^* \end{aligned}$$

em que o integral que figura no somatório é igual a C_n. Tem-se portanto,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, C_n^* \\ S &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \end{aligned}$$

resultado que constitui o teorema da potência de Parseval.

A interpretação espectral deste resultado é simples: a potência média dum sinal pode ser determinada quadrando e adicionando as alturas $|C_n| \equiv |C(nf_0)|$ das linhas do espectro de amplitude. O teorema de Parseval implica a sobreposição da potência média dado que a potência média total de um sinal $v(t)$ é a soma das potências médias das suas componentes de frequência.

2.2 Sinais não-periódicos: Espectros Contínuos

Passemos dos sinais periódicos aos não-periódicos, ou seja, aos sinais que só existem durante um intervalo de tempo relativamente curto. Se um sinal não-periódico possui uma energia total finita mas não nula, será representado, no domínio da frequência, por um espectro contínuo que é dado pela transformada de Fourier desse sinal.

2.2.1 A Transformada de Fourier

A figura 2.10 mostra um sinal não-periódico típico. O pulso rectangular é *estritamente limitado no tempo* dado que $v(t)$ é identicamente nulo fora do intervalo $[-\tau/2, +\tau/2]$. Tais sinais são designados, de uma maneira geral, por *pulsos*. Em qualquer dos casos ao calcularem-se as médias de $v(t)$ ou de $|v(t)|^2$ para todo o tempo verifica-se que são iguais a zero. Consequentemente, em lugar de se falar em potência média, nos sinais não-periódicos, interessa considerar a sua energia total.

Se $v(t)$ representar uma tensão aos terminais de uma resistência R, a energia total transferida para essa resistência será dada pelo integral da potência instantânea $\frac{v^2(t)}{R}$. Definiremos portanto *energia normalizada*, E, de um sinal por

$$E \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2\, dt \tag{2.16}$$

A energia do sinal é dada pela área total sob a curva definida por $|v(t)|^2$. Por exêmplo, a energia normalizada de um pulso rectangular de amplitude A é $E = A^2\tau$.

Se o integral 2.16 existir e fôr limitado, isto é, se $0 < E < \infty$, o sinal $v(t)$ tem uma energia bem definida e será chamado de *sinal de energia não-periódico*. A maior parte dos sinais limitados no tempo de interesse prático satisfazem esta condição que é necessária para que o sinal possa ser analisado por transformada de Fourier.

O espectro do sinal periódico foi definido pela função discreta C_n definida no conjunto domínio $\{\cdots, -2f_0, -f_0, 0, +f_0, +2f_0, \cdots\}$

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

Um sinal não-periódico, por sua vez, pode ser considerado um sinal periódico de período infinito, definindo-se o seu espectro pelo limite de $T_0 C_n$ quando $T_0 \to \infty$, isto é

$$\lim_{T_0\to\infty}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

onde, na passagem ao limite, nf_0 se transforma na variável contínua f, passando o espectro do sinal não-periódico $v(t)$ a estar definido no intervalo contínuo $]-\infty, +\infty[$. Designaremos essa função por $V(f)$, a qual representa a *Transformada de Fourier*, ou *espectro*, do sinal $v(t)$.

$$V(f) \doteq \mathcal{F}[v(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \tag{2.17}$$

Assim, o sinal $v(t)$ já não é uma soma de componentes de frequência discreta mas o integral de uma função $V(f)$ num intervalo contínuo, função essa que tem as dimensões de uma densidade de amplitude, *Volts/Hz*. Isto é, enquanto o sinal periódico se obtinha por soma

$$v(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{j2\pi n f_0 t} \qquad n \;=\; 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

o sinal não-periódico obtem-se por integração

$$v(t) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} V(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \tag{2.18}$$

integral que define a transformada inversa $\mathcal{F}^{-1}[V(f)]$. As equações 2.17 e 2.18 correspondem respectivamente às equações 2.10 e 2.9 da secção 2.1 para os sinais periódicos.

$V(f)$ desempenha o mesmo papel para os sinais não-periódicos que C_n para os sinais periódicos. Um sinal não-periódico terá um *espectro contínuo* em lugar de um espectro de linhas. Interessa realçar três das propriedades mais importantes da Transformada de Fourier $V(f)$ de um sinal $v(t)$

(i) $V(f)$ é uma função complexa de variável real. $|V(f)|$ é o espectro de amplitude e $\arg V(f)$ é o espectro de fase

(ii) O valor de $V(f)$ para $f = 0$ é igual à área de $v(t)$ pois $V(0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, dt$ e já C_0 era igual ao valor médio de $v(t)$

(iii) Se o sinal $v(t)$ fôr real então $V(-f) = V^*(f)$ e $|V(-f)| = |V(f)|$ e $\arg V(-f) = -\arg V(f)$ pelo que o espectro de amplitude tem simetria par e o de fase tem simetria impar.

2.2.2 Pulso rectangular

Na secção 2.1.4 determinámos o espectro de linhas de uma sequência de pulsos rectangulares. Consideremos agora pulso rectangular da figura 2.10(a). Este modelo de sinal é tão frequente que se utiliza o símbolo Π para o representar. Adoptaremos a seguinte notação

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \tag{2.19}$$

para simbolizar uma função rectangular com amplitude unitária e duração τ, centrada em $t = 0$. O pulso da figura será pois representado por

$$v(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \tag{2.20}$$

Inserindo este $v(t)$ na definição (2.17) da transformada, vem

$$\begin{aligned} V(f) &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} A\, e^{-j2\pi f t}\, dt \\ V(f) &= \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f \tau) \\ V(f) &= A\tau\, \mathrm{sinc}(f\tau) \end{aligned} \tag{2.21}$$

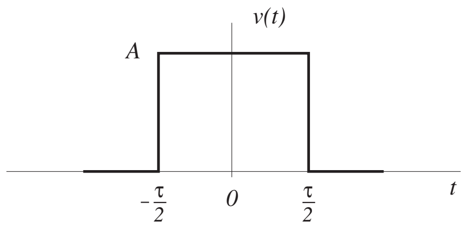

Figura 2.10: Pulso rectangular não-periódico

e tem-se $V(0) = A\tau$ que é exactamente a área do pulso. O espectro correspondente está esquematizado na figura 2.11. Comparando este espectro com o da figura 2.8 verifica-se que à medida que $T_0 \to \infty$, as linhas se aproximam indefinidamente passando o espectro a consistir na curva contínua que inicialmente era a envolvente das amplitudes das mesmas linhas.

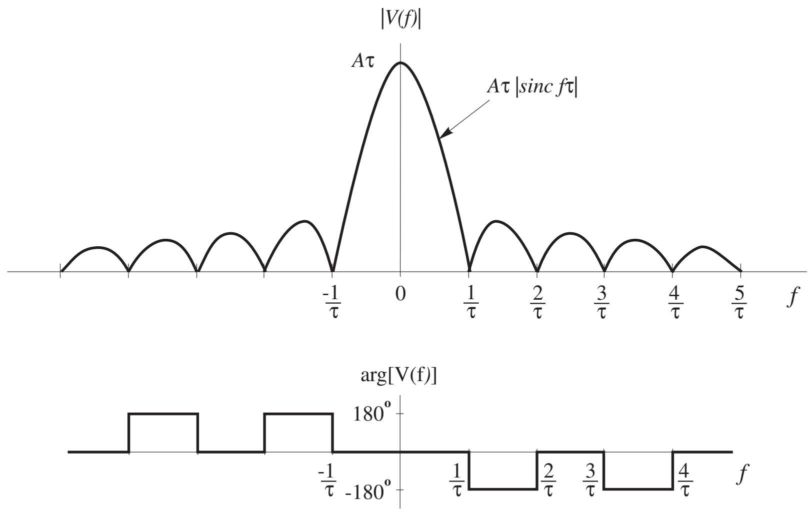

Figura 2.11: Espectro do pulso rectangular $V(f) = A\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)$

Uma análise detalhada da figura 2.11 revela que a parte significativa do espectro se encontra no intervalo definido por $|f| < \frac{1}{\tau}$ dado que $|V(f)| \ll |V(0)|$ para $|f| > \frac{1}{\tau}$. Como se justificará mais adiante, na secção 2.2.4, podemos considerar o valor $\frac{1}{\tau}$ como uma medida da *largura espectral* do pulso rectangular de duração τ.

Se a largura do pulso fôr reduzida (redução de τ) a largura espectral é aumentada e vice-versa. Conclui-se então que pulsos curtos têm espectros largos e pulsos prolongados possuem espectros estreitos. Este fenómeno, chamado de *espalhamento recíproco* é uma propriedade geral de todos os sinais, quer sejam pulsos ou não, pois as variações temporais rápidas dão origem a componentes harmónicas de alta frequência enquanto que variações temporais mais lentas e suaves exibem menor conteúdo de altas frequências.

2.2.3 Teorema da Energia

O teorema da energia (ou teorema de Rayleigh) de sinais não-periódicos é análogo ao teorema da potência de Parseval para sinais periódicos. Diz que a energia, E, de um sinal $v(t)$ está relacionada com o seu espectro, $V(f)$, por

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) \cdot V^*(f)\, df \\ E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |V(f)|^2\, df \qquad (2.22) \end{aligned}$$

o que significa que a energia total de um sinal pode ser calculada integrando o quadrado do espectro de amplitude em $]-\infty, +\infty[$.

A importância da equação 2.22 não reside tanto no facto de se poder calcular o valor de E dessa forma, pois que normalmente o integral no domínio do tempo é mais fácil de calcular, isto é, $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2\, dt$. A sua importância revela-se no facto de indicar que $|V(f)|^2$ representa a distribuição da energia do sinal no domínio da frequência designando-se, por isso, de *função de densidade espectral de energia.* Esta função aparece frequentemente representada pela letra G, isto é

$$G_v(f) \equiv |V(f)|^2$$

é a densidade espectral de energia do sinal v em *Joules/Hz*. A energia numa qualquer banda de frequência diferencial df *Hz* é igual a $|V(f)|^2\, df$ *Joules*.

2.2.4 Largura de Banda

A interpretação dada acima a $|V(f)|^2$ fornece uma justificação quantitativa à noção de largura espectral no sentido em que a maior parte da energia de um dado sinal deverá estar contida no intervalo de frequência que se tomar como sendo a *banda* do sinal, intervalo esse cuja amplitude define a *largura de banda* do sinal.

Para ilustrar este ponto considere-se a figura 2.12 que representa a densidade espectral de energia de um pulso rectangular cuja largura espectral se disse atrás ser de $\frac{1}{\tau}$.

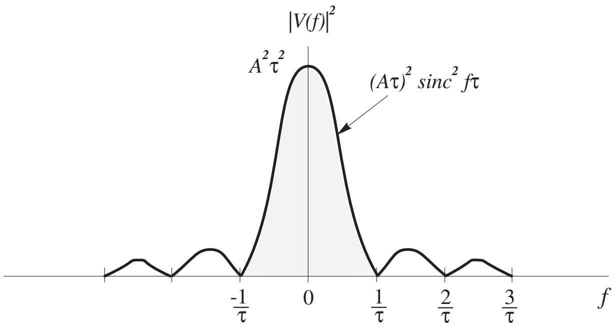

Figura 2.12: Densidade espectral de energia de um pulso rectangular

A energia, $E_{1/\tau}$, na banda $]-\frac{1}{\tau},+\frac{1}{\tau}[$ é dada pela área sombreada na figura 2.12, situada entre o primeiro zero negativo e o primeiro zero positivo.

$$
\begin{aligned}
E_{1/\tau} &= \int_{-\frac{1}{\tau}}^{+\frac{1}{\tau}} |V(f)|^2 \, df \\
E_{1/\tau} &= \int_{-\frac{1}{\tau}}^{+\frac{1}{\tau}} (A\tau)^2 \operatorname{sinc}^2(f\tau) \, df \\
E_{1/\tau} &= 0.92 \, A^2 \, \tau
\end{aligned}
$$

O cálculo do integral foi feito numéricamente. A energia total do pulso é $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 \, dt = A^2 \, \tau$, portanto, o intervalo espectral que na secção 2.2.2 se disse ter uma amplitude de $\frac{1}{\tau}$, contém mais de 90% da energia total do sinal.

Definição 2.1 —**Largura de Banda de um sinal**
Largura de Banda, B, de um sinal é a amplitude do menor intervalo espectral positivo que contém 90% da energia total do sinal (ou da sua potência média total, caso se trate de um sinal periódico).

2.3 Modulação

2.3.1 Modulação de Amplitude

A multiplicação de um sinal $v(t)$ por uma onda sinusoidal dá origem a um novo sinal $v_m(t)$ cujo espectro é o de $v(t)$ transladado na frequência de um valor igual à frequência do sinal sinusoidal. Este resultado, que é a uma propriedade da transformada de Fourier conhecida por *Teorema da modulação*, é extremamente importante em telecomunicações pelo que passamos a demonstrá-lo.

Seja $v(t) \leftrightarrow V(f)$, isto é, $V(f) = \mathcal{F}[v(t)]$.

Calculemos o espectro de $v_m(t) = v(t) \cdot \cos(2\pi f_p t)$:

$$\begin{aligned} V_m(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_m(t)\, e^{-\jmath 2\pi f t}\, dt \\ V_m(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot \cos(2\pi f_p t) \cdot e^{-\jmath 2\pi f t}\, dt \end{aligned}$$

como $\cos(2\pi f_p t) = \frac{e^{\jmath 2\pi f t} + e^{-\jmath 2\pi f t}}{2}$ tem-se

$$\begin{aligned} V_m(f) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{\jmath 2\pi f_p t} \cdot e^{-\jmath 2\pi f t}\, dt \; + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-\jmath 2\pi f_p t} \cdot e^{-\jmath 2\pi f t}\, dt \\ V_m(f) &= \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, e^{-\jmath 2\pi (f - f_p) t}\, dt}_{(1)} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, e^{-\jmath 2\pi (f + f_p) t}\, dt}_{(2)} \end{aligned}$$

O integral (1) é o espectro de $v(t)$ transladado na frequência e centrado em f_p e o integral (2) é o espectro de $v(t)$ centrado em $-f_p$, donde resulta sintéticamente

$$v(t) \cdot \cos(2\pi f_p t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[V(f - f_p) + V(f + f_p) \right] \tag{2.23}$$

O sinal $\cos(2\pi f_p t)$ chama-se sinal portador ou *portadora* e f_p é o valor da frequência portadora. Importa notar que a modulação, que neste caso é uma *modulação de amplitude*, duplica a largura espectral do sinal pois a parte das frequências negativas do espectro passa para o lado das frequências positivas.

Exêmplo 2.1 – Modulação digital de amplitude
Considere-se a sinusoide de duração finita da figura 2.13 resultado da multiplicação de um pulso rectangular de duração τ e amplitude A por um cosseno de frequência f_p e amplitude unitária

$$z(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cdot \cos(2\pi f_p t)$$

trata-se portanto de uma modulação digital de amplitude de onda contínua.

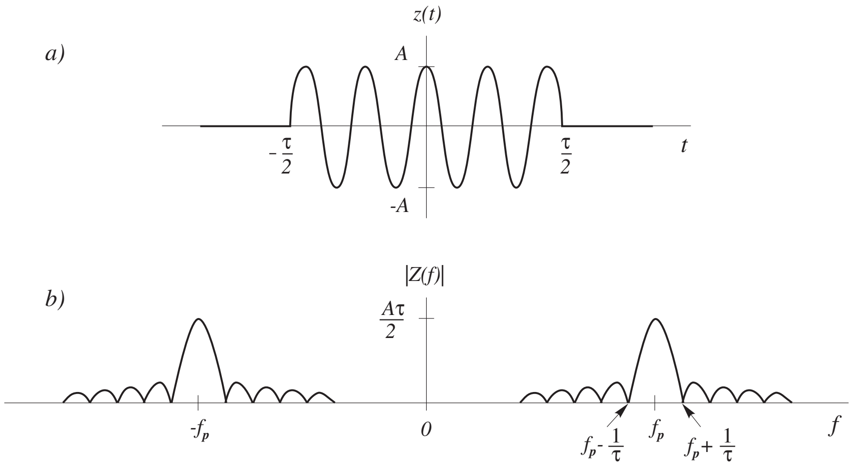

Figura 2.13: *a*) Sinal modulado em amplitude e *b*) respectivo espectro

O espectro do sinal $z(t)$ é dado por

$$Z(f) \;=\; \frac{A\tau}{2}\, sinc[(f - f_p)\tau] \;+\; \frac{A\tau}{2}\, sinc[(f + f_p)\tau]$$

Dado que a sinusoide tem duração finita o seu espectro é contínuo e contém mais frequências para além de $\pm f_p$. As restantes frequências resultam do facto de se ter $z(t) = 0$ para $|t| > \frac{\tau}{2}$ e quanto menor fôr τ, maior o espalhamento espectral à volta de $\pm f_p$ (espalhamento recíproco). Por outro lado, se a sinusoide tivesse duração infinita, a representação no domínio da frequência seria um espectro de linhas bilateral contendo sómente as frequências discretas $\pm f_p$.

2.3.2 Modulação de Frequência

O sinal sinusoidal da figura 2.14 possui frequência constante, f_p, excepto no intervalo $-1/f_p < t < 1/f_p$ em que a frequência muda para $2f_p$. Este é um sinal típico de *frequência modulada*, designadamente, uma modulação digital de frequência de onda contínua, em que é a frequência da portadora que varia de acordo com as variações da amplitude do sinal modulante que, no caso da figura, é um sinal digital com tempo de símbolo igual a $\frac{2}{f_p}$ seg. Interessa-nos conhecer o seu espectro.

Para efeitos de análise seja $\tau = 2/f_p$ e decomponhamos o sinal $v(t)$ numa soma de três parcelas da seguinte maneira:

$$v(t) \;=\; A\,\cos(2\pi f_p t) - A\,\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\,\cos(2\pi f_p t) + A\,\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\,\cos(4\pi f_p t)$$

A primeira parcela representa um sinal cosseno de frequência f_p, a se-

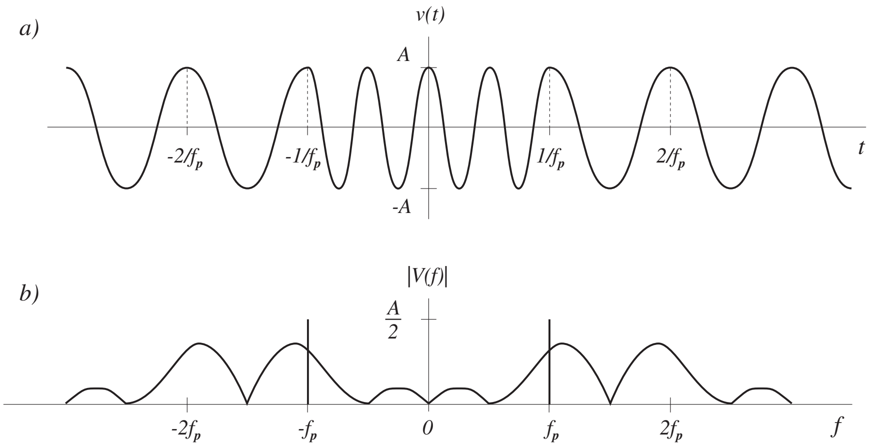

Figura 2.14: a) Sinal modulado em frequência e b) respectivo espectro

gunda retira-lhe a parte entre $-1/f_p$ e $+1/f_p$ e a terceira introduz neste intervalo um cosseno de frequência $2f_p$. Calculando o espectro (a transformada de Fourier) de $v(t)$ parcela a parcela obtem-se

$$\begin{aligned} V(f) &= \mathcal{F}[A\cos(2\pi f_p t)] - \\ & -\frac{A\tau}{2}\left[sinc(f-f_p)\tau + sinc(f+f_p)\tau\right] + \\ & +\frac{A\tau}{2}\left[sinc(f-2f_p)\tau + sinc(f+2f_p)\tau\right] \end{aligned}$$

A primeira parcela é o espectro de uma sinusóide de amplitude A que é constituido por duas linhas de amplitude $A/2$ localizadas respectivamente em f_p e em $-f_p$. As duas parcelas seguintes, de acordo com o resultado da equação 2.23, são os espectros de dois pulsos rectangulares modulando em amplitude portadoras de frequências respectivamente f_p e $2\,f_p$.

A figura 2.14b) representa graficamente o espectro de amplitude desta modulação de frequência. Notar que $|V(f)|$ não é simétrica relativamente à frequência da portadora f_p.

Nesta figura pode verificar-se que o sinal modulado em frequência possui uma largura de banda que é *quatro vezes* maior do que a do sinal modulante (o sinal da informação).

2.4 Problemas

2.1 – Um sinal digital modulado em amplitude (ASK) com potência total normalizada de 250 μV^2, possui uma densidade espectral unilateral de potência indicada na figura 2.15. Determine a banda a 90% da potência ocupada pelo sinal e a respectiva largura.

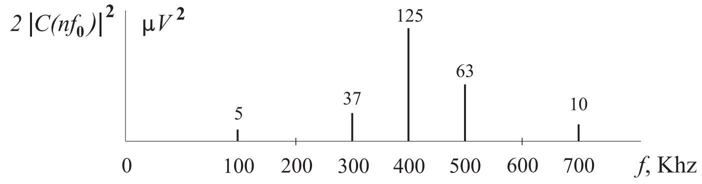

Figura 2.15: Densidade espectral de potência de um sinal ASK

2.2 – A figura 2.16 representa dois sinais rectangulares bipolares periódicos, $v_1(t)$ e $v_2(t)$, onde cada rectângulo simboliza um dígito binário.

O tempo do símbolo binário é de T_b *seg* em ambos os casos, a duração do rectângulo é, respectivamente, τ_1 *s* e τ_2 *s* e a sua amplitude é $\pm A$ *Volt*.

a) Determine o espectro de cada um dos sinais.

b) Represente graficamente os espectros de amplitude de v_1 e v_2.

c) Determine a largura de banda a 90% da potência de cada um destes sinais.

d) Compare os espectros de amplitude obtidos em b) com o do sinal rectangular periódico unipolar da secção 2.1.4 quanto às respectivas componentes contínuas e harmónicas.

Sugestão: represente graficamente os espectros de amplitude dos dois sinais na mesma escala de frequência. Considere $\tau = \tau_1$ e note que o período T_0 do sinal na figura 2.7 é diferente do destes

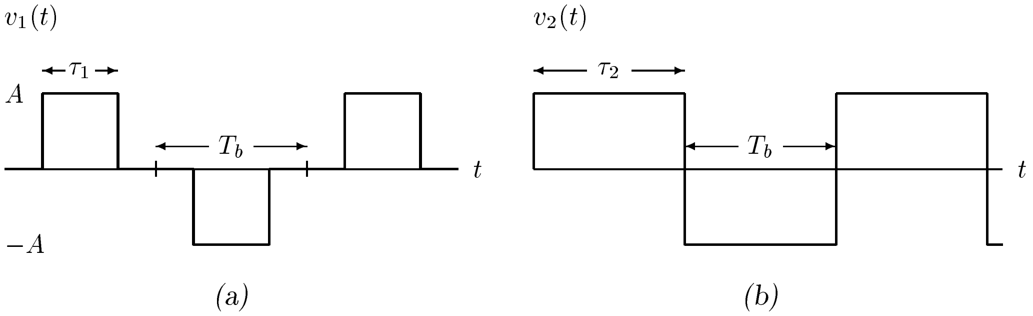

Figura 2.16: Sinais rectangulares periódicos *(a)* RZ e *(b)* NRZ

2.3 – Considere o sinal periódico $v(t)$, de período T_0 *seg*, definido por

$$v(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_p t) & \text{para} \quad 0 < t < \dfrac{T_0}{2} \\ -\sin(2\pi f_p t) & \text{para} \quad -\dfrac{T_0}{2} < t < 0 \end{cases}$$

em que $f_p = \frac{2}{T_0}$.

a) Esquematize graficamente três períodos deste sinal.

b) Determine uma expressão para o seu espectro, $V(f)$.

c) Discuta a possibilidade de utilização de formas de onda deste tipo para a codificação de linha de dígitos binários.

2.4 – A substituição de t por αt em $v(t)$ reflecte uma mudança da escala de tempos do sinal $v(t)$. O sinal $v(\alpha t)$ resultará *expandido* ou *comprimido* no tempo consoante $|\alpha| < 1$ ou $|\alpha| > 1$. Se α fôr negativo significa que se inverteu o sentido do tempo. Estas três situações correspondem, por exêmplo, e respectivamente, à reprodução de uma gravação de audio ou de vídeo a uma velocidade mais baixa, mais elevada ou em sentido contrário. Esta mudança de escala no domínio do tempo implica uma *reciprocidade* no domínio da frequência definida por

$$v(\alpha t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{|\alpha|} V\left(\frac{f}{\alpha}\right) \qquad \alpha \neq 0 \tag{2.24}$$

que é designada por lei do *espalhamento recíproco*. Utilize a definição da transformada de Fourier para mostrar a veracidade da relação 2.24.

2.5 – Determine o espectro do sinal

$$v(t) = \begin{cases} A \sin\left(\dfrac{6\pi t}{\tau}\right) & \text{para} \quad |t| < \dfrac{\tau}{2} \\ 0 & \text{para} \quad |t| \geq \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

e represente graficamente o espectro de amplitude.
No gráfico, considere $\tau = \frac{1}{3} \times 10^{-4}\ s$.

2.6 – Considere a modulação em frequência de uma portadora de frequência f_p, por uma sequência periódica de pulsos rectangulares de duração $\tau = \frac{4}{f_p}$ e de amplitude unitária com polaridade alternada. O desvio de frequência para cada polaridade é $0.5 f_p$.

a) Esboce a forma de onda de dois períodos do sinal modulado.

b) Determine a densidade espectral de potência do sinal modulado e represente-a graficamente.

c) O que conclui quanto à largura de banda deste sinal relativamente à que obteria por modulação de amplitude da mesma portadora.

fim do capítulo 2